Question de cours. Soit E un espace vectoriel complexe hermitien et f un endomorphisme linéaire de E qui commute avec son adjoint f^*.

1. Montrer que f et f^* ont un vecteur propre unitaire u commun.

2. Montrer que l'orthogonal, $F = u^\perp$, de u est invariant par f et son adjoint f^*.

Exercice I. Soit E un espace vectoriel de dimension 6 et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que

$$P_u(X) = (X-2)^6 \ , \ \deg(m_u(X)) = 3$$

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? trigonalisable ?

Le polynôme caractéristique de u est scindé donc u est trigonalisable.
Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise le polynôme caractéristique (et de plus ils ont les mêmes racines) donc $m_u(X) = (X-2)^3$. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal n'a que des racines simples ce qui n'est pas le cas ici.
u n'est pas diagonalisable.

2. Préciser le polynôme minimal $m_u(X)$.

D'après la question précédente $m_u(X) = (X-2)^3$.

3. Considérons les noyaux $K_i := \ker[(u - 2\mathrm{id}_E)^i]$, $i \in \mathbb{N}^*$. Préciser K_i pour $i \geq 3$ et justifier votre réponse.

Le ploynôme minimal est un polynôme annulateur de l'endomorphisme (c'est même le générateur unitaire de l'idéal annulateur) donc $m_u(u)$ est l'endomorphisme nul, son noyau est donc $K_3 = E$. Pour $i > 3$, $(u-2\mathrm{id}_E)^i = m_u(u) \circ (u-2\mathrm{id}_E)^{i-3}$ est donc aussi l'endomorphisme nul, et son noyau est $K_i = E$ aussi.

4. Décrire un algorithme qui, en fonction de K_1, K_2 et K_3, donne une base de E pour laquelle la matrice de u est sous forme normale de JORDAN.

Nous savons que $0 \neq K_1 \subsetneq K_2 \subsetneq K_3 = E$. Soit V_3 un supplémentaire de K_2 dans K_3 :

$$E = K_3 = K_2 \oplus V_3.$$

notons que V_3 n'est pas réduit à 0 car $(X-2)^2$ n'annule pas u et donc $K_2 \neq E$.
Soit $V_{3,2} = (u - 2\mathrm{id}_E)(V_3)$, alors $V_{3,2}$ est un sous-espace vectoriel de K_2 qui est isomorphe (donc de même dimension) que V_3. $V_{3,2}$ intersecte K_1 trivialement donc K_1 et $V_{3,2}$ sont en somme directe. $K_1 \oplus V_{3,2}$ est un sous-espace vectoriel de K_2.
Soit V_2 un supplémentaire de $K_1 \oplus V_{3,2}$ dans K_2 :

$$K_2 = K_1 \oplus V_{3,2} \oplus V_2$$

notons qu'il est possible que V_2 soit trivial.
Soit $V_{3,1} = (u - 2\mathrm{id}_E)(V_{3,2}) = (u - 2\mathrm{id}_E)^2(V_3)$ et $V_{2,1} = (u - 2\mathrm{id}_E)(V_2)$. Les deux sous-espaces vectoriels $V_{3,1}$ et $V_{2,1}$ sont des sous-espaces vectoriels de K_1. De plus $u - 2\mathrm{id}_E$ se restreint à $V_{3,2} \oplus V_2$ en un homomorphisme injectif et donc $V_{3,1}$ et $V_{2,1}$ sont en somme directe et on a les égalités $\dim V_{3,1} = \dim V_{3,2} = \dim V_3$ et $\dim V_{2,1} = \dim V_2$.
Soit V_1 un supplémentaire de $V_{3,1} \oplus V_{2,1}$ dans K_1.

$$K_1 = V_{3,1} \oplus V_{2,1} \oplus V_1$$

notons encore que V_1 peut être trivial.
Nous avons donc obtenu une décomposition de E en une somme directe :

$$\begin{array}{ccccccc} E & = & & V_3 & & & \\ & & \oplus & V_{3,2} & \oplus & V_2 & \\ & & \oplus & V_{3,1} & \oplus & V_{2,1} & \oplus \quad V_1 \end{array}$$

la troisième ligne est une décomposition de K_1, la deuxième ligne et la troisième ligne forment ensemble une décomposition de K_2, dans chaque colonne on descend d'une ligne à la suivante par l'isomorphisme induit par la restriction de $u - 2\mathrm{id}_E$.
Soit maintenant $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ des bases de V_1, V_2 et V_3 respectivement. Soit $\mathcal{B}_{3,2} = (u - 2\mathrm{id}_E)(\mathcal{B}_3)$, $\mathcal{B}_{3,1} = (u - 2\mathrm{id}_E)(\mathcal{B}_{3,1}) = (u - 2\mathrm{id}_E)^2(\mathcal{B}_3)$ et $\mathcal{B}_{2,1} = (u - 2\mathrm{id}_E)(\mathcal{B}_2)$, ce sont respectivement des bases de $V_{3,2}$, $V_{3,1}$ et $V_{2,1}$. La réunion $\mathcal{B}$ de ces six bases est une base de E dans laquelle la matrice de u est sous forme normale de Jordan. Il faut noter que l'ordre de la base $\mathcal{B}$ est important, il faut le choisir de manière à regrouper les colonnes indiquées dans la décomposition en somme directe de E. Chaque colonne correspond alors à un bloc de Jordan.

5. Donner les formes normales de Jordan possibles pour u et préciser dans chaque cas les dimensions de K_1, K_2 et K_3.

Le polynôme minimal de u est scindé et n'a qu'une racine 2. L'endomorphisme u a donc une forme normale de JORDAN avec des blocs de JORDAN de valeur propre 2.
La taille du plus grand bloc de JORDAN de u est donnée par l'exposant de $(X-2)$ dans le polynôme minimal $m_u(X) = (X-2)^3$ c'est donc 3.
La somme des tailles des blocs de JORDAN est la dimension de l'espace E , c'est-à-dire 6.
On a donc trois décomposition possible : $6 = 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1$.
Les formes normales de JORDAN de u sont donc respectivement

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Le nombre de blocs de JORDAN de taille 3 est la dimension de V_3, le nombre de blocs de JORDAN de taille 2 est la dimension de V_2 et le nombre de blocs de JORDAN de taille 3 est la dimension de V_1. Les dimensions de V_1, V_2 et V_3 sont donc dans les trois cas ci-dessus respectivement $(0,0,2)$, $(1,1,1)$ et $(3,0,1)$. D'après la décomposition de E en somme directe donnée à la question précédente, nous avons que les dimensions de K_1, K_2 et K_3 vérifient

$$\dim K_1 = \dim V_{3,1} + \dim V_{2,1} + \dim V_1 = \dim V_1 + \dim V_2 + \dim V_3,$$

$$\dim K_2 = \dim K_1 + \dim V_{3,2} + \dim V_2 = \dim V_1 + 2\dim V_2 + 2\dim V_3,$$

Dans les trois cas ci-dessus respectivement, les dimensions $(\dim K_1, \dim K_2, \dim K_3)$ sont $(2,4,6)$, $(3,5,6)$ et $(4,5,6)$.

Exercice II. Soit A et B deux matrices. Dans chacun des cas dire si la condition proposée implique ou non que A et B sont semblables. Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Non : $A = 0$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont le même déterminant 0, la même trace 0 et ne sont pas semblables (car $B \neq 0$).

2. $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, $P_A(X) = P_B(X)$ et $m_A(X) = m_B(X)$;

Oui :
Puisque le corps est $\mathbb{C}$ les deux matrices sont trigonalisables.
Les dimensions des sous-espaces caractéristiques associés à chaque valeur propres sont égales à la multiplicité de cette valeur propre comme racine du polynôme caractéristique. Puisque les polynômes caractéristiques sont égaux, les dimensions des sous-espaces caractéristiques de A et B associés à chaque valeur propres sont égales.
La multiplicité de chaque racine du polynôme minimal est égale à la taille du plus grand bloc de JORDAN associée à cette racine. Puisque les deux polynômes minimaux sont égaux, pour chaque valeur propre de A et B les tailles des plus grands blocs de JORDAN associés à cette valeur propre sont égaux.
Rappelons aussi que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.
On peut ainsi distinguer les cas suivant :
cas 1 : $m_A(X) = m_B(X)$ n'a que des racines simples. A et B sont diagonalisables et sont toutes deux semblables à la même matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines de $P_A(X) = P_B(X)$ comptées avec multiplicité. A et B sont donc semblables.
cas 2 : $m_A(X) = m_B(X)$ a une racine double λ. A et B sont donc semblables à une matrice de JORDAN ayant un bloc de JORDAN associé à la valeur propre λ de taille 2 et un autre bloc de JORDAN de taille 1 associé à la troisième racine (comptée avec multiplicité) de $P_A(X) = P_B(X)$. A et B sont donc semblables.
cas 3 : $m_A(X) = m_B(X)$ a une racine triple λ. A et B sont donc semblables à une matrice de JORDAN ayant un bloc de JORDAN associé à la valeur propre λ de taille 3. Elles sont donc semblables.

3. $A, B \in O_2(\mathbb{R})$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Non :
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont toutes les deux orthogonales, et ont la même trace 0. $\det A = 1$ et $\det B = -1$ donc A et B ne sont pas semblables.

4. $A, B \in O_2(\mathbb{R})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Oui :
Le déterminant d'une matrice orthogonale est 1 ou -1.
Si $\det A = \det B = -1$, alors A et B sont les matrices de symétries axiales et A et B sont semblables à la matrice de la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A et B sont donc semblables.
Si $\det A = \det B = 1$, alors A et B sont les matrices de rotations r_A et r_B. Les angles θ_A et θ_B de ces rotations vérifient $2\cos\theta_A = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 2\cos\theta_B$. Les angles des rotations sont donc égaux ou opposés, c'est-à-dire que $A = B$ ou bien que $\theta_A = -\theta_B$. Dans ce dernier cas les matrices A et B sont conjuguées par la matrice S de la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.
Dans tous les cas A et B sont semblables.

5. $A, B \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Oui :
Les isométries vectorielles directes de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ sont les rotations. A et B sont les matrices de rotations r_A et r_B dont les angles θ_A et θ_B vérifient $2\cos\theta_A + 1 = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 2\cos\theta_B + 1$. Ainsi $\theta_A = \pm\theta_B$.
Dans $\mathbb{R}^3$ la rotation d'angle θ et d'axe orienté par un vecteur non-nul u est aussi la rotation d'angle $-\theta$ et d'axe orienté par le vecteur $-u$.
Les rotations r_A et r_B sont donc deux rotations de même angle et d'axes différents. Elles sont donc conjuguées (par n'importe quel isométrie qui envoie l'axe de l'une sur l'axe de l'autre). A et B sont donc conjuguées.

6. $A, B \in O_4(\mathbb{R})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Non :
Parmi les isométries directes de $\mathbb{R}^4$ il y a les matrices qui se décomposent en deux blocs de rotations. La trace est alors deux fois la somme des cosinus des angles. Il nous suffit donc de trouver deux paires d'angles différentes et de même somme. Par exemple : $\cos 0 + \cos(\pi/2) = 1 = \cos(\pi/3) + \cos(\pi/3)$.
Soit donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Elles ont toutes les deux pour déterminant 1 et pour trace 2. 1 est valeur propre de A et pas de B. A et B ne sont donc pas semblables.

7. $A, B \in U_2(\mathbb{C})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Oui :
Les matrices de $U_2(\mathbb{C})$ sont diagonalisables, les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique qui est $X^2 - \operatorname{tr} AX + \det A = X^2 - \operatorname{tr} BX + \det B$. A et B sont donc semblablesà la même matrice diagonale. Elle sont donc semblables.

Exercice III. **1.** Soit M une matrice réelle 6×6 découpée en blocs 2×2 : $M = \begin{pmatrix} R_\theta & I_2 & 0 \\ 0 & R_\theta & I_2 \\ 0 & 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, où R_θ est la matrice de la rotation d'angle θ. Déterminer la forme normale de JORDAN complexe de M (on distinguera les cas $\theta = 0[\pi]$ et $\theta \neq 0[\pi]$).

D'après la décomposition par bloc, le polynôme caractéristique de M est $(P_\theta(X))^3$ où P_θ est le polynôme caractéristique de la matrice R_θ :

$$P_\theta(X) = X^2 - 2X\cos\theta + 1 \text{ et } P_M(X) = (X^2 - 2X\cos\theta + 1)^3.$$

On suppose pour l'instant que $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ c'est-à-dire que $\theta \neq 0[\pi]$.
Les racines du polynôme caractéristique $P_M(X)$ sont donc $e^{\pm i\theta}$ chacune d'ordre 3. Le polynôme minimal de M est un polynôme à coefficients réels car M est une matrice à coefficient réel, il a donc des racines complexes conjugueés avec même multiplicités. Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique et a les mêmes racines.
Le polynôme minimal de M est donc $P_\theta(X)$, $(P_\theta(X))^2$ ou $P_M(X)$. En calculant par blocs nous obtenons que

$$P_\theta(M) = \begin{pmatrix} 0 & 2R_\theta - 2\cos\theta I_2 & I_2 \\ 0 & 0 & 2R_\theta - 2\cos\theta I_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_\theta(M)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\sin^2\theta I_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Le polynôme minimal de M est donc $P_M(X) = (X^2 - 2X\cos\theta + 1)^3$.
La multiplicité des racines dans le polynôme minimal nous donne la taille du plus grand bloc de Jordan. La forme normale de Jordan de M comporte donc deux blocs de Jordan de taille 3 de valeurs propres respectives $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$:

$$J = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

Supposons maintenant que $\theta = 0[\pi]$. La matrice M est alors (avec $+$ is $\theta = 0[2\pi]$ et $-$ si $\theta = \pi[2\pi]$)

$$M = \begin{pmatrix} \pm I_2 & I_2 & 0 \\ 0 & \pm I_2 & I_2 \\ 0 & 0 & \pm I_2 \end{pmatrix},$$

la matrice est déjà sous forme de Jordan à l'ordre des vecteurs près. En effet en prenant la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_3, e_5, e_2, e_4, e_6)$ c'est à dire la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

un rapide calcul donne

$$P^{-1}MP = J = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

2. Soit U une matrice réelle telle que $P_U(X) = m_U(X) = (X^2 - 2X\cos\theta + 1)^3$ avec $\theta \neq 0[\pi]$. Montrer que M et U sont semblables.

Si $P_U(X) = m_U(X) = (X^2 - 2X\cos\theta + 1)^3$, alors la forme normale de JORDAN de U comporte deux blocs de JORDAN de taille 3 et de valeurs propres respectives $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ car ce sont les deux racines du polynôme minimal et elles sont toutes les deux de multiplicité 3. La matrice U a donc pour forme normale de JORDAN la matrice J de la question précédente et U est semblable à M. Remarquons que nous n'avons pas utilisé ici que U est une matrice réelle.