Question de cours. Soit E un espace vectoriel complexe hermitien et f un endomorphisme linéaire de E qui commute avec son adjoint f^*.

1. Montrer que f et f^* ont un vecteur propre unitaire u commun.

2. Montrer que l'orthogonal, $F = u^\perp$, de u est invariant par f et son adjoint f^*.

Exercice I. Soit E un espace vectoriel de dimension 6 et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme tel que

$$P_u(X) = (X-2)^6 \ , \ \deg(m_u(X)) = 3$$

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? trigonalisable ?

2. Préciser le polynôme minimal $m_u(X)$.

3. Considérons les noyaux $K_i := \ker\left[(u - 2\mathrm{id}_E)^i\right]$, $i \in \mathbb{N}^*$. Préciser K_i pour $i \geq 3$ et justifier votre réponse.

4. Décrire un algorithme qui, en fonction de K_1, K_2 et K_3, donne une base de E pour laquelle la matrice de u est sous forme normale de JORDAN.

5. Donner les formes normales de JORDAN possibles pour u et préciser dans chaque cas les dimensions de K_1, K_2 et K_3.

Exercice II. Soit A et B deux matrices. Dans chacun des cas dire si la condition proposée implique ou non que A et B sont semblables. Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

2. $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, $P_A(X) = P_B(X)$ et $m_A(X) = m_B(X)$;

3. $A, B \in O_2(\mathbb{R})$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

4. $A, B \in O_2(\mathbb{R})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

5. $A, B \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

6. $A, B \in O_4(\mathbb{R})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

7. $A, B \in U_2(\mathbb{C})$, $\det A = \det B$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$;

Exercice III. **1.** Soit M une matrice réelle 6×6 découpée en blocs 2×2 : $M = \begin{pmatrix} R_\theta & I_2 & 0 \\ 0 & R_\theta & I_2 \\ 0 & 0 & R_\theta \end{pmatrix}$, où R_θ est la matrice de la rotation d'angle θ. Déterminer la forme normale de JORDAN complexe de M (on distinguera les cas $\theta = 0[\pi]$ et $\theta \neq 0[\pi]$).

2. Soit U une matrice réelle telle que $P_U(X) = m_U(X) = (X^2 - 2X\cos\theta + 1)^3$ avec $\theta \neq 0[\pi]$. Montrer que M et U sont semblables.