Question de cours. Énoncer et démontrer le théorème de décomposition des noyaux (on se restreindra au cas d'un polynôme P produit de deux polynômes P_1 et P_2).

Exercice I. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il trigonalisable ?

2. Déterminer les sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Déterminer les sous-espaces caractéristiques de f.

4. Déterminer le polynôme minimal de f.

5. Donner la forme normale de JORDAN de f.

6. Donner une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est une matrice de JORDAN.

Exercice II.

1. Soit f un endomorphisme linéaire d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2. Montrer que f est nilpotent si et seulement si sa trace et son déterminant sont nuls.

2. On considère quatre réels a, b, c et d et les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels a, b, c et d pour que N soit nilpotente et $P + N$ ne le soit pas.

3. L'ensemble des matrices nilpotentes de $M_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice III. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit f et g deux endomorphismes linéaires de E qui commutent et dont les polynômes minimaux et caractéristiques sont respectivement

$$m_f(X) = P_f(X) = (X-1)^2(X+1)^2 \text{ et } P_g = (X-2)^4.$$

1. Donner les dimensions des sous-espaces caractéristiques N_1 et N_{-1} de f et N_2 de g.

2. Donner la forme normale de JORDAN de f.

3. Donner la dimension des sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de f.

4. Montrer que chacun des sous-espaces E_1, E_{-1}, N_1 et N_{-1} est invariant par g (*Indication : utiliser le fait que f et g commutent*).

5. En étudiant les restrictions g_1 et g_{-1} de g à N_1 et N_{-1} respectivement, montrer que le polynôme minimal de g divise $(X-2)^2$.