Exercice I. **1.** Déterminer les polynômes caractéristiques, les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dans chaque cas préciser si la matrice est diagonalisable ou trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. Pour les matrices diagonales préciser une matrice semblable diagonale et une matrice de passage.

Exercice II. **1.** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre *complexe* de A. Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A.

2. Montrer que, si l'on désigne par $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ l'espace propre de A considerée comme matrice complexe, alors on a $E_{\bar{\lambda}} = \bar{E}_\lambda$.

3. Diagonaliser sur $\mathbb{C}$ la matrice C de l'exercice I et la matrice : $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice III. Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de A.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique. Déterminer $\mathrm{Ker} f^2$ et $\mathrm{Ker} f^3$.

3. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Que pouvez-vous dire des images par f de e_1, e_2 et e_3

4. Trouver une telle base (e_1, e_2, e_3).

Exercice IV. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M. Est-elle diagonalisable ?

2. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - id)$.

3. Soit ε_1 un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u - id)$. Déterminer $\mathrm{Ker}(u - id)^2$ puis un vecteur ε_2 tel que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ soit une base de $\mathrm{Ker}(u - id)^2$.

4. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Exercice V. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que 1 et 2 sont les seules valeurs propres de g. Calculer les sous-espaces propres associés. En déduire que g n'est pas diagonalisable.

2. Trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon_3 = (x, 1, 0, 0)$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(g - id)^3 \setminus \mathrm{Ker}(g - id)^2$.

3. Soient $\varepsilon_2 = (g - id)(\varepsilon_3)$, $\varepsilon_1 = (g - id)^2(\varepsilon_3)$ et ε_4 le vecteur de $\mathrm{Ker}(g - 2id)$ dont la dernière coordonnée vaut 1. Vérifier que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base et donner la matrice de g dans cette base.

Exercice VI. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (-y, x)$.

1. Déterminer les endomorphismes f^2, f^3 et f^4.

2. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ la trace de l'endomorphisme $P(f)$ est $P(i) + P(-i)$.

Exercice VII. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes et préciser si elles sont diagonalisables ou non :

1. les 5 matrices de l'exercice I ;

2. la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ $(a,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ (discuter selon les valeurs de a,b et c).

Exercice VIII. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et inversible. En déduire le polynôme minimal $m_A(X)$ et, en utilisant celui-ci, déterminer A^{-1}.