Exercice I. Classifier, à similitude près, toutes les matrices nilpotentes d'ordre 5. Dans chaque cas, préciser le polynôme minimal.

Exercice II. Soit $A \in M_6(\mathbb{C})$ telle que
$$P_A(X) = (X-1)^4(X-2)^2 \ , \ m_A(X) = (X-1)^2(X-2).$$
Que peut-on dire des dimensions des espaces propres ? Quelles sont les formes de Jordan possibles ?

Exercice III. **1.** Montrer que toutes les matrices carrées réelles de taille 2 dont le polynôme caractéristique est X^2+4 sont semblables à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Donner deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique et qui ne sont pas semblables.

3. Donner deux matrices de même taille qui ont le même polynôme minimal et qui ne sont pas semblables.

Exercice IV. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $m_f(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$.

1. Donner les valeurs propres réelles et complexes de f.

2. En déduire le polynôme caractéristique de f et la dimension de ses sous espaces propres et caractéristique E_2 et N_2.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle la matrice de f est
$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice V. Soit $J_{\lambda,r}$ le bloc de Jordan de valeur propre λ et de taille r. On considère la sous-algèbre, $\mathcal{J}$, de $M_r(\mathbb{R})$ engendré par $J_{\lambda,r}$: $\mathcal{J} = \{P(J_{\lambda,r}) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$.

1. Montrer que $\mathcal{J}$ est égal à l'ensemble des matrices de la forme
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_r \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{r-1} \\ 0 & 0 & x_1 & \cdots & x_{r-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & \cdots & x_1 \end{pmatrix}, \quad x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer que $\mathcal{J}$ est égal à l'ensemble $C(J_{\lambda,r})$ des matrices qui commutent avec $J_{\lambda,r}$.

Exercice VI. En utilisant leur forme normale de Jordan calculer les puissances n-ièmes des matrices
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice VII. On pose $F := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Donner la forme normale de Jordan, J, de F et donner une matrice de passage P telle que $J = P^{-1}FP$.

On définit la suite de Fibonacci $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \;\; \varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n.$$

2. Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\begin{pmatrix} \varphi_{n+1} \\ \varphi_n \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Donner le terme général de (φ_n).

Exercice VIII. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' = 6y'' - 12y' + 8y, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = -1,\; y''(0) = 3.$$