Exercice I. Cauchy-Schwarz. Soit E un espace vectoriel complexe et φ une forme hermitienne positive. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

Décrire les cas d'égalité.

Exercice II. Classification des espaces euclidiens et hermitiens. Soient (E, f) et (E', f') deux espaces euclidiens (resp. hermitiens) de même dimension. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $u : E \to E'$ tel que

$$\forall x,\ y \in E, \quad \langle u(x), u(y)\rangle_{f'} = \langle x, y\rangle_f.$$

Exercice III. Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que $f := \mathrm{Re}(h)$ est un produit scalaire sur E, tandis que $\omega := \mathrm{Im}(h)$ est une forme antisymétrique non-dégénérée sur E.

Exercice IV. Topologie des groupes linéaires.

1. Démontrer que les groupes $O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$, considérés comme sous-espaces topologiques de $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$), sont compacts.

2. Montrer que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe.

3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

4. Les groupes $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ sont-ils compacts ?

Exercice V. Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E. Le groupe de q est $G(q) = \{g \in \mathrm{GL}(E) \mid \forall x \in E,\ q(g(x)) = q(x)\}$. Montrer que si q et q' ont la même signature alors $G(q)$ et $G(q')$ sont isomorphes (*Indication : on pourra montrer que g laisse invariant les formes polaires associées et généraliser l'exercice IV*).

Exercice VI. 1. Montrer que deux rotations de même angle sont conjuguées dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

2. Montrer que deux rotations sont conjuguées dans $O_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, leurs angles sont égaux ou opposés.

Exercice VII. 1. Soit u un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'orbite et le stabilisateur de u sous l'action de $O_2(\mathbb{R})$.

2. Même question en dimension 3.

3. Montrer que le groupe des isométries qui laisse globalement fixe un tétaèdre régulier est isomorphe à S_4 le groupe des permutations d'un ensemble à quatre éléments.

4. Soit G_{cube} le groupe des isométries du cube. Donner le cardinal de G_{cube}. Montrer que G_{cube} est résoluble (*Indication : on montrera qu'il y a deux tétaèdre réguliers inscrits dans un cube ce qui donne un morphisme surjectif de G_{cube} dans S_2 dont le noyau est le groupe des isométries du tétraèdre*).

Exercice VIII. **1.** Soit K un corps commutatif quelconque. Démontrer que l'application $M_n(K) \times M_n(K) \to K$ donnée par $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

2. Montrer que, sur $\mathfrak{sl}_2(K)$, la forme quadratique associée à la forme $(A, B) \to \mathrm{tr}(AB)$ est donnée par $A \mapsto -2\det(A)$.

3. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^t\bar{A}\ B)$ est un produit hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$. En déduire que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA\ B)$ définit un produit scalaire euclidien sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice IX. **Actions de $PGL_2(\mathbb{C})$ par homographies.** À une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on associe l'homographie $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \cup \{\infty\} & \to & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$

1. Montrer que cela définit un morphisme de groupe de $PGL_2(\mathbb{C})$ dans le groupe des homographies.

2. Montrer que l'image d'une droite ou d'un cercle par une homographie est une droite ou un cercle (on commencera par le vérifier sur des exemples).

3. Montrer que si A est dans $PSL_2(\mathbb{R})$ alors l'homographie laisse globalement invariant le demi-plan supérieur $\mathbb{H}_2$.

4. Décrire le stabilisateur de ∞ dans $PSL_2(\mathbb{R})$. Même question avec $\{0, \infty\}$ (les homographies qui laissent fixe 0 et ∞).

5. Montrer que $PSL_2(\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}_2$ transitivement sur les triplets de points disctincts.