Exercice I. Groupe des isométries du tétraèdre

On considère l'espace euclidient $E = \mathbb{R}^3$ munit du repère orthonormé canonique $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. On considère les points $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, -1, -1)$, $C = (-1, 1, -1)$ et $D = (-1, -1, 1)$

1. Géométrie.

a. Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier et donner la longueur de ses arêtes.

b. Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est centré en O l'origine du repère.

c. Donner les coordonées des milieux des arêtes et les équations des trois droites joignant les milieux opposés.

d. Faire un dessin.

2. Isométries. *On pourra répondre aux quatre questions suivantes simultanément.*

a. Faire la liste des vingt-quatre isométries du tétraèdre $ABCD$.

b. Pour chacune des isométries préciser si elle est directe ou indirecte.

c. Pour chacune des isométries indiquer comment elle permute les sommets du tétraèdre.

d. Pour chacune des isométries indiquer comment elle permute les axes du repère.

e. Donner la matrice d'une des rotations (non-triviale) parmi les isométries du tétraèdre (*attention cette rotation doit être choisie différemment de celles choisies par vos camarades*). Préciser les vecteurs propres et les valeurs propres de cette matrice. Interprétez géométriquement ces vecteurs propres et valeurs propres.

3. A_4 n'est pas simple.

Le groupe symétrique de degré 4 est ici le groupe des permutations de l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D\}$. Le groupe symétrique de degré 3 est ici le groupe des permutations de l'ensemble des trois axes du repère $\{xx', yy', zz'\}$.

a. Déterminer l'ensemble N des isométries du tétraèdre qui fixent chacun des trois axes du repère.

b. Donner explicitement l'homomorphisme de groupe $\varphi : S_4 \to S_3$ défini aux questions 2.c et 2.d.

c. Déterminer le noyau de φ.

Exercice II. A_5 est simple. On se propose, au contraire, dans cet exercice de montrer que tout homomorphisme de A_5 dans un groupe G est trivial : il est soit constant égal à l'élément neutre de G, soit injectif.

1. Classes de conjugaisons dans A_5.

a. Donner les différents types de décompostions en produit de cycles à support disjoints des éléments de A_5.

b. Soit $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_\ell)$ un cycle de longueur ℓ (dans S_n) et soit γ un permutation dans S_n. Calculer $\gamma\sigma\gamma^{-1}$.

c. Soit $a_1, \dots, a_5$ et $b_1, \dots, b_5$ des indices dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tels que

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

autrement dit les a_k sont deux à deux distincts et les b_k sont deux à deux distincts. On considère les permutations

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_5 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\gamma_0{\gamma_1}^{-1}$ est une transposition et en déduire que γ_0 ou γ_1 est dans A_5.

d. Soit $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$ et $\beta = (b_1, b_2, b_3)$ deux cycles de longueur 3 dans A_5. Montrer qu'il existe une permutation γ de A_5, telle que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

e. Soit $\alpha = (a_1, a_2)(a_4, a_5)$ et $\beta = (b_1, b_2)(b_4, b_5)$ deux produits de deux transpositions à supports disjoints. Calculer $\gamma_0\alpha{\gamma_0}^{-1}$ et $\gamma_1\alpha{\gamma_1}^{-1}$. En déduire qu'il existe une permutation γ dans A_5 telle que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$.

f. Soit $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ et $\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ deux cycles de longueur 5. Calculer $\gamma_0\alpha{\gamma_0}^{-1}$. Soit

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\gamma_0{\gamma_2}^{-1}$ et en déduire que γ_0 ou γ_2 appartient à A_5. Calculer $\gamma_2\alpha{\gamma_2}^{-1}$. En déduire qu'il existe une permutation γ dans A_5 telle que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$ ou $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta^2$.

La suite de cet exercice est facultative.

2. Soit $\varphi : A_5 \to G$ un homomorphisme de groupe. Soit $N = \ker\varphi$ son noyau.

a. Montrer que pour toute permutation $\alpha \in N$, pour toute permutation $\gamma \in A_5$, $\gamma\alpha\gamma^{-1}$ est dans le noyau N.

b. Montrer que si le noyau N contient un cycle de longueur 3 alors il contient tous les cycles de longueur 3.

c. Montrer que si le noyau de N contient $\alpha = (a_1, a_2)(a_4, a_5)$ un produit de deux transpositions à supports disjoints alors il contient tous les produits de transpositions à supports disjoints.

d. Montrer que si le noyau N contient un cycle de longueur 5 alors il contient tous les cycles de longueur 5.

e. Calculer $(1\ 2\ 3)(3\ 4\ 5)$, $(1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)(4\ 5)$ et $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 2\ 3\ 5\ 4)$.

f. Conclure que si le noyau N de φ est non-trivial alors il est égal à A_5.