Trois heures, documents et calculatrices interdits.

Exercice I. (Cours, 6 points)

1. Enoncer et démontrer le théorème des restes chinois.

2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est un anneau principal.

Exercice II. On se place dans $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$.

1. a. Calculer l'inverse de 7.

b. Résoudre l'équation $5x + 3 = 0$.

c. Résoudre l'équation $4x + 10 = 0$.

2. a. Montrer que l'application $f : x \mapsto 7x + 3$ est bijective.

b. Trouver tous les x tels que $f(x) = x$.

3. Donner le cardinal du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$.

4. a. Calculer 5^2, 5^3 et 5^6.

b. En déduire l'ordre de 5 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times$.

5. Donner explicitement un isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, 0)$ et $((\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^\times, \times, 1)$.

Exercice III. Dans S_4 on considère les éléments $\alpha = (12)(34)$ et $\beta = (13)(24)$, et N le sous-groupe qu'ils engendrent.

1. Déterminer les quatre éléments de N et dresser sa table de Cayley. Montrer que les éléments de N commutent.

2. Montrer que tous les éléments de N sont pairs et qu'ils sont d'ordre 1 ou 2.

3. Donner tous les éléments de S_4 qui sont pairs et d'ordre 1 ou 2.

4. Soit $\rho, \sigma \in S_4$, montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1}$ et ρ ont même ordre

5. Soit $\rho, \sigma \in S_4$, montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1}$ et ρ ont même signature.

6. En déduire que pour $\sigma \in S_4$ et $\rho \in N$, $\sigma\rho\sigma^{-1} \in N$.

7. Déterminer une permutation $\sigma \in S_4$ telle que $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$ et $\sigma\beta\sigma^{-1} = \alpha$

Exercice IV. Soit G un groupe commutatif et x et y des éléments de G d'ordres finis respectifs m et n.

1. Donner la définition de l'ordre de x.

2. a. Soit d un diviseur de m déterminer l'ordre de x^d dans G.

b. Pour $a \in \mathbb{Z}$, donner l'ordre de x^a en fonction de m et $\text{pgcd}(a, m)$.

c. Soit d un diviseur de m, donner un élément de G d'ordre d.

3. a. Montrer que si m et n sont premiers entre eux et si m et n divisent $a \in \mathbb{Z}$ alors mn divise a.

b. Si m et n sont premiers entre eux montrer que l'ordre de $z = xy$ est mn.

Suite au verso

4. Soit $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ et $n = p_1^{\beta_1} \cdots p_r^{\beta_r}$ les décompositions en facteurs premiers de m et n, où $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \geq 0$ sont des entiers positifs.

a. Donner la décomposition en facteurs premiers du pgcd et du ppcm de m et n.

b. Montrer que pour chaque i il existe un élément z_i de G d'ordre $p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$.

c. Donner l'ordre de $z = z_1 \cdots z_r$.