Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. (Cours, 6 points)

1. Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs. Donner la définition de la division euclidienne de a par b. Justifier par une démonstration cette définition.

2. Soit a et b sont deux nombres entiers, soit m un multiple commun à a et b. Montrer que m est un multiple du ppcm de a et b.

Exercice II.

Soit a un entier. Montrer que $14a + 3$ et $21a + 4$ sont premiers entre eux.

Exercice III.

1. Trouver des coefficients de BÉZOUT pour 135 et 121.

2. Donner toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $135x + 121y = 1$.

Exercice IV. On considère un nombre entier positif x et son écriture décimale

$$x = \overline{c_\ell c_{\ell-1} \cdots c_1 c_0},$$

c'est à dire que $c_0, c_1, \ldots, c_\ell$ sont des chiffres entre 0 et 9 et que

$$x = c_0 + 10c_1 + \cdots + 10^{\ell-1}c_{\ell-1} + 10^\ell c_\ell.$$

Pour simplifier les notations, et quitte à prendre $c_\ell = 0$ ou $c_{\ell-1} = 0$, on suppose que $\ell = 3\ell'$.

1. Montrer que

$$x \equiv \sum_{k=0}^{k=\ell'} (c_{3k} + 10c_{3k+1} + 100c_{3k+2}) \quad [37].$$

2. Donner le reste de la division euclidienne de 357 941 122 658 par 37.