*Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.*

**Exercice I. (Cours, 6 points)**

**1.** Soit $n$ un entier et $\alpha$ une permutation de $S_n$. Montrer que $I_\alpha = \{k \in \mathbb{Z} \mid \alpha^k = id\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

**2.** Soit $\alpha = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_r$ une permutation de $S_n$ et sa décomposition en un produit de cycles à supports disjoints. Donner l'ordre de $\alpha$ en fonction des longueurs des cycles.

**Exercice II.** On considère les permutations de $S_8$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

**1.** Décomposer $\alpha$ et $\beta$ en produits de cycles à supports disjoints.

**2.** Calculer les signatures de $\alpha$ et $\beta$.

**3.** Calculer $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1}$

**Exercice III.** On considère l'application $\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 5x+2 \end{array}$.

**1.** Montrer que $\alpha$ est une bijection.

**2.** Montrer que $\alpha^2 = id$

**3.** Décomposer $\alpha$ en un produit de cycles à supports disjoints.

**Exercice IV.** Soit $\alpha$ une permutation de $S_n$ d'ordre $m$.

**1.** On suppose que $m = rs$ où $r$ et $s$ sont deux entiers. Montrer que $\alpha^r$ est d'ordre $s$.

**2.** On suppose au contraire que $r$ est un nombre premier avec $m$. Montrer que $\alpha^r$ est d'ordre $m$.