Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. (Cours, 6 points)

1. Montrer que la composée de deux injections est une injection.

2. Énoncer le théorème fondamental de décompostion des permutations.

Exercice II. On considère les permutations de S_8, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Décomposer α et β en produit de cycles à supports disjoints.

2. Déterminer la signature de α et β.

3. Calculer α^{-1}.

4. Calculer $\alpha\beta$ et $\beta\alpha^{-1}$.

5. Déterminer l'ordre de α.

6. Calculer α^{38}.

Exercice III. Soit $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \in S_6$.

Donner les décompositions en cycles à supports disjoints, les ordres et les signatures des puissances σ^k de σ.

Exercice IV. Soit α et β deux permutations de S_n. On appelle **commutateur** de α et β la permutation $[\alpha, \beta] = \alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha\beta$.

1. Montrer que α et β commutent si, et seulement si, $[\alpha, \beta] = id$.

2. Montrer que $[\alpha, \beta]$ est une permutation paire.

3. Calculer $[(1\ 2\ 3), (2\ 3)]$ dans S_3.