Exercice I. **1.** Montrer que la composée de deux applications injectives est injective.

2. Montrer que la composée de deux applications surjectives est surjective.

3. Donner un exemple (en dessinant un diagramme cartésien) d'une application injective et d'une application surjective dont la composée n'est ni injective ni surjective.

Exercice II. Soit n un entier positif.

1. Soit $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $\mathrm{add}_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x+b \end{array}$ est une bijection et donner sa bijection réciproque.

2. Pour tous $b, b' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que $\mathrm{add}_b \circ \mathrm{add}_{b'} = \mathrm{add}_{b+b'}$.

3. À quelle condition sur $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'application $\mathrm{mult}_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax \end{array}$ est-elle une bijection, dans ce cas donner une bijection réciproque.

4. Pour $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ et $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, montrer que l'application $\mathrm{aff}_{a,b} : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & ax+b \end{array}$ est une bijection.

5. Pour $a, a' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ et $b, b' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, déterminer $\mathrm{aff}_{a,b} \circ \mathrm{aff}_{a',b'}$.

6. Pour $n = 18$ trouver a et b tels que $\mathrm{aff}_{a,b}(6) = 0$ et $\mathrm{aff}_{a,b}(11) = 17$. Déterminer les points fixes de $\mathrm{aff}_{a,b}$.

Exercice III. On considère dans l'espace euclidien orienté de dimension 3 un tétraèdre régulier $ABCD$ centré à l'origine. Dans tout l'exercice on dessinera des figures.

1. Faire la liste des 24 isométries de $\mathbb{R}^3$ qui laissent globalement fixe le tétraèdre $ABCD$.

2. Écrire la table de composition de ces isométries (on se limitera à une table comportant une isométrie de chaque type).

3. Pour chacune des 24 isométries déterminer comment elle permute les sommets.

4. Réciproquement, montrer que toute permutation de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$, correspond à exactement une des isométries du tétraèdre.

Exercice IV. On considère σ, β et α les permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 1 & 3 & 9 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 1 & 8 & 3 & 2 & 10 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les orbites et le support de ces permutations.

2. Décomposer les, en produit de cycles disjoints, puis en produit de transpositions.

3. Calculer la signature de chacune des permutations de deux manières différentes.

4. Calculer $\alpha \circ \beta$.

5. Déterminer β^{-1}.

Exercice V. **1.** Ecrire tous les éléments de S_3.

2. Ecrire la table de la loi $\circ$ dans S_3.

3. En déduire tous les sous-groupes de S_3.

Exercice VI. **1.** Soit $n \geq 2$. On veut montrer par récurrence que les transpositions $(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)$ engendrent le groupe S_n.

a. Initialiser la récurrence.

b. Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et considérons $\sigma \in S_n$. Appliquer d'abord l'hypothèse de récurrence dans le cas où $\sigma(n) = n$. Puis, si $\sigma(n) = i$ avec $i \neq n$ considérer $(1,n) \circ (1,i) \circ \sigma$ pour se ramener au cas précédent.

2. Montrer que $\forall i \in \{1,\ldots,n-1\}$, $(1,i+1) = (1,i) \circ (i,i+1) \circ (1,i)$ et en déduire par récurrence sur i en utilisant la question précédente que $(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)$ engendrent le groupe S_n.

3. Montrer la **relation de tresse** : $\forall i \in \{1,\ldots,n-2\}$

$$(i,i+1)(i+1,i+2)(i,i+1) = (i+1,i+2)(i,i+1)(i+1,i+2).$$

Exercice VII. **1.** Dans S_6 décomposer en cycles toutes les puissances des permutations (1234), (12345) et (123456).

2. Soit dans S_n un cycle σ de longueur ℓ ($\ell \leq n$).

a. Supposons que $\ell = rs$, déterminer le nombre de cycles et leur longueur que comporte σ^r.

b. Au contraire si $\ell \wedge r = 1$, montrer que σ^r possède un seul cycle de longeur ℓ et que σ et σ^r engendrent le même sous-groupe cyclique.

Exercice VIII. Dans S_4 on considère les éléments $\alpha = (12)(34)$ et $\beta = (13)(24)$, et N le sous-groupe qu'ils engendrent.

1. Déterminer les quatre éléments de N et dresser sa table de Cayley. Montrer que les éléments de N commutent.

2. Montrer que les éléments de N sont exactement les éléments d'ordre divisant 2 et de signature 1.

3. Soit $\sigma \in S_4$, montrer que pour tout élément ρ de S_4, $\sigma\rho\sigma^{-1}$ et ρ ont même ordre et même signature.

4. En déduire que pour $\sigma \in S_4$ et $\rho \in N$, $\sigma\rho\sigma^{-1} \in N$. *(On dit que N est distingué dans S_4.)*

5. Déterminer une permutation $\sigma \in S_4$ telle que $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$ et $\sigma\beta\sigma^{-1} = \alpha$

Exercice IX. **1.** Soit $c = (a_1, c_2, \ldots, a_\ell)$ un cycle de S_n. Soit σ un élément de S_n. Montrer que $\sigma c \sigma^{-1}$ est un cycle dont on précisera la longueur et le support.

2. Soit $d = (b_1, b_2, \ldots, b_\ell)$ un autre cycle de même longueur, donner une permutation σ tel que $\sigma c \sigma^{-1} = d$.

3. En utilisant l'exercice 6 montrer que si un sous-groupe distingué de S_n contient une transposition alors il est égal à S_n.

4. Montrer que A_5 est simple