MA301 Analyse II

Séries numériques TD 1

Exercice 1.

Les séries suivantes convergent-elles ?

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{3n}\right)$,
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^n+\frac{1}{2n}\right)$.

Exercice 2.

Une série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$ *est dite* télescopique *si le terme général* a_n *peut s'écrire* $a_n = b_{n+1} - b_n$ *pour une certaine suite numérique* $(b_n)_{n\geq 1}$.

(a) *Vérifier que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} a_n = b_{k+1} - b_1$. *Montrer que la série converge ssi la limite* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n$ *existe. On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(b_{n+1}-b_1\right).$$

(b) *Montrer que* $c_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. *Soit* $a_n = \frac{1}{c_n}$. *Ecrire* a_n *sous la forme* $b_{n+1} - b_n$. *Evaluer alors la somme* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) *Même question pour* $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3.

On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. *On note* S_N *la* N^e *somme partielle de cette série et on pose*

$$T_N = S_N - \ln(N+1).$$

(a) *En admettant que*

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x},$$

déterminer la monotonie de la suite $(T_N)_{N\geq 1}$.

(b) *Que vaut* T_1 ? *En déduire* $\forall\ N \geq 1, \quad S_N \geq \ln(N+1)$.

(c) *Calculer* $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N$. *La série* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *est-elle convergente ?*

Exercice 4.

On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. *On note* S_N *la* N^e *somme partielle cette série.*

(a) *Vérifier que* $\forall\ n \geq 2$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

(b) *En déduire que* $\forall\ N \geq 2$,

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leq S_N \leq 2 - \frac{1}{N}.$$

(c) *En déduire que la suite* $(S_N)_{N\geq 1}$ *est majorée.*

(d) *Déterminer la monotonie de la suite* $(S_N)_{N\geq 1}$.

(e) *En déduire la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

(f) *Vérifier l'encadrement suivant*

$$\frac{3}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

Exercice 5.

Etudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants, (on pourra utiliser les règles de comparaison).

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!}$, $n \geq 2$.
3. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!}$, $n \geq 3$.
4. $u_n = \frac{1}{10n+1}$, $n \geq 0$.
5. $u_n = \ln \frac{2+n^2}{1+n^2}$, $n \geq 1$.
6. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$, $n \geq 1$.
7. $u_n = \frac{a}{n-1} - \frac{1}{n}$, $a \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$.

Exercice 6.

Etudier la nature et calculer la somme de la série numérique de terme général.

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}, \quad n \geq 0.$$

Exercice 7.

Etudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \dfrac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, $n \geq 1$.
2. $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{3^n n!}$, $n \geq 1$.
4. $u_n = \dfrac{1}{(ln(n+1))^n}$, $n \geq 1$.
5. $u_n = \left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{(2n+1)}$, $n \geq 1$.

Exercice 8.

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \dfrac{\sin(n\alpha)}{n^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.
2. $u_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$, $n \geq 1$.
4. $u_n = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \dfrac{n}{2^n}$, $n \geq 1$.
5. $u_n = \dfrac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n} - 3n}$, $n \geq 1$.
6. $u_n = \dfrac{1 + (-1)^n n}{n^2}$, $n \geq 1$.

Exercice 9.

1. *Discuter la convergence de la série de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{25n}$, *pour* $n \geq 1$ *et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de* 10^{-2}.
2. *Discuter la convergence de la série de terme général* $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+3}$, *pour* $n \geq 1$.

Exercice 10.

Etudier les séries de termes généraux suivants

1. $u_n = \dfrac{e^{in\theta}}{\ln(n)}$, $n \geq 2$.
2. $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n + \cos(n)}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

Exercice 11.

Etudier les séries de termes généraux suivants

1. $u_n = na^n$, $n \geq 1$.
2. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$, $n \geq 1$.

Exercice 12.

Montrer que les séries de termes généraux positifs a_n *et* $\dfrac{a_n}{1+a_n}$ *sont de même nature.*

Exercice 13.

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *une suite de réels.*

(a) *Montrer que si la série* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge vers* S*, alors* $\sum_{n\geq 0} (a_n + a_{n+1})$ *converge et calculer sa somme.*

(b) *Supposons que* $a_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que si* $\sum_{n\geq 0} (a_n + a_{n+1})$ *converge vers* T*, alors* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge et calculer sa somme.*

(c) *Donner un exemple où au contraire,* $\sum_{n\geq 0} (a_n + a_{n+1})$ *converge et* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *diverge.*