MA301 Analyse II

Intégrales généralisées TD 2

Exercice 1.

Etudier les intégrales suivantes et calculer les

1. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt.$
2. $J = \displaystyle\int_1^2 \ln(1+t^2)\,dt.$
3. $K = \displaystyle\int_1^e t^n \ln(t)\,dt.$
4. $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}.$

Exercice 2.

Quelle est la nature des intégrales suivantes

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\sqrt{t}}.$
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,dt.$
3. $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha (1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})\,dt,\ \alpha \in \mathbb{R}.$

Exercice 3.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les intégrales existent

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b}.$
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,dt.$

Exercice 4.

Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur différence

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\,dt.$
2. $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{Arctan(t)}{t^2}\,dt.$

Exercice 5 (Fonction Gamma).

Soit $n \in \mathbb{N}$

1. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ *est convergente. On note* $\Gamma(n)$ *sa valeur.*
2. *Trouver une relation entre* $\Gamma(n+1)$ *et* $\Gamma(n)$.
3. *Calculer* $\Gamma(0)$ *et* $\Gamma(1)$.
4. *En déduire la valeur de* $\Gamma(n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.

Etudier la nature des intégrales suivantes

1. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2} dt.$
2. $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt.$
3. $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt.$
4. $L = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2+1} dt.$

Exercice 7.

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes

1. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt.$
2. $J = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}} dt.$
3. $K(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt,\ x > 0.$

Exercice 8.

1. *Soit* $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue croissante telle que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ *converge.*
   (a) *Montrer que pour tout* $t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, *on a* $f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$.
   (b) *Montrer que pour tout* $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, *on a* $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t)$.
   (c) *En déduire que*
   $$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt.$$
   (d) *Montrer que*
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$
2. *Montrer que pour tout nombre réel* $\alpha > 0$, *on a*
   $$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha} \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Exercice 9.

Le but de l'exercice est de déterminer, en utilisant une comparaison série-intégrale, la nature de l'intégrale suivante

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^4 \sin^2(t)}\, dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\, dt, \qquad \text{où } f(t) = \frac{1}{1 + t^4 \sin^2(t)}.$$

1. *Montrer que*

$$u_n \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + n^4 \pi^4 \sin^2(t)} := 2 I_n.$$

2. *En utilisant l'inégalité $\sin t \geq \dfrac{2t}{\pi}$, montrer que*

$$I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 + 4n^4 \pi^2 t^2}.$$

3. *En faisant le changement de variable $u = 2n^2 \pi t$ sur la dernière intégrale montrer que*

$$I_n \leq \frac{1}{2n^2 \pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2}.$$

4. *Etudier la nature de la série $\sum u_n$. On note M sa somme.*
5. *Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\pi > x$*

$$\int_0^x f(t)\, dt \leq M.$$

6. *En déduire que l'intégrale converge.*

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue

1. *On suppose la fonction f bornée : il existe une constante M telle que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.*
   (a) *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\, dt$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$.*
   (b) *Calculer la limite $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\, dt$.*
2. *Même question en supposant maintenant qu'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ telles que*

$$\forall\ t \geq A, \qquad |f(t)| \leq e^{\alpha t}.$$

Exercice 11.

Etudier la nature des intégrales dépendant du paramètre k, $(k \in \mathbb{N})$ données par

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2}\, dt$$

Calculer les I_k en mettant tout d'abord en évidence une relation de récurrence ($I_p = \frac{2}{p+1} I_{p+2}$). On donne $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 12.

1. *Montrer que les intégrales* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ *sont absolument convergentes pour tout réel* $\alpha > 1$.
2. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ *diverge pour* $0 < \alpha \leq 1$.
3. *A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ *est convergente pour tout réel* α *tel que* $0 < \alpha \leq 1$.
4. *Quelle est la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, $\alpha > 0$ *?*
5. *Quelle est la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$ *?*

Exercice 13.

Soient deux réels a *et* b *tels que* $0 < a < 1 < b$. *En fonction des réels* α *et* β, *donner la nature des intégrales dites "de Bertrand" définies comme suit*

$$I = \int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}, \qquad J = \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}.$$

1. *Premier cas :* $\alpha > 1$, *on écrit* $\alpha = 1 + 2h$, *avec h>0.*
2. *Deuxième cas :* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.
3. *Troisième cas :* $\alpha = 1$ *et* $\beta \leq 1$.
4. *Quatrième cas :* $\alpha < 1$, *on écrit* $\alpha = 1 - 2h$, *avec h>0.*