MA301 Analyse II

Suites de fonctions TD 3

Exercice 1.

On considère les suites de fonctions définies sur $[0,1]$ *par*

1. $f_n(x) = x^n$,
2. $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.
3. $h_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & si\ 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & si\ \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions sur $[0,1]$. *Etudier la dérivée de* g_n. *Que pouvez-vous en conclure ?*

Exercice 2.

La suite de fonctions (f_n) *est définie sur* $]-\infty, +\infty[$ *par son terme général* $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

(a) Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction f *que l'on déterminera.*

(b) Montrer que la convergence est uniforme sur tous les intervalles du type $[a,b]$ *avec* $|a| < 1$ *et* $|b| < 1$, *ou bien* $a > 1$, *ou bien* $b < -1$.

(c) Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur des intervalles ouverts contenant 1 *ou* -1.

Exercice 3.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ *par* $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

Exercice 4.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}$ *définies sur l'intervalle* $[0,100]$. *Que dire de cette convergence sur l'intervalle* $[0,+\infty[$ *?*

Exercice 5.

On donne la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$, $x \in]0,1[$.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite sur l'intervalle de définition.

Exercice 6.

Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x}dx$.

Exercice 7.

Soit la suite de fonctions (f_n) *définies sur* $[0,+\infty[$ *par*

$$f_n(x) = \frac{n}{(x-n)^2+n^2}$$

(a) Montrer que pour tout $a \geq 0$*, la suite* (f_n) *converge uniformément sur* $[a,+\infty[$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera.*

(b) Montrer que les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ *convergent et que pourtant, on ne peut pas passer aux limites :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Expliquer.

Exercice 8.

Soit la suite de fonctions (f_n) *définies sur* $[-1,+1]$ *par*

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

(a) Montrer qu'elle converge uniformément sur $[-1,+1]$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera.*

(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = f'(x)$*, dans tout intervalle de la forme suivante :* $[-1,b]$*,* $b<0$ *ou* $[a,1]$*,* $a>0$*.*

(c) Montrer que cette dernière propriété n'est pas vraie sur $[-1,+1]$*. (Le théorème sur dérivation des suites de fonctions terme à terme ne s'applique pas ici sur* $[-1,+1]$*).*

Exercice 9.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(t) = \sqrt{t}$*,* $t \in [0,1]$*. On définit sur* $[0,1]$ *la suite de fonctions* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par*

$$p_0(t) = 0, \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2), \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}.$$

1. (a) Calculer p_1 *et* p_2*.*

(b) Montrer que les applications p_n*,* $n\in\mathbb{N}$*, sont polynômiales.*

2. (a) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$ *et tout* $n\in\mathbb{N}$*, on a*

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - p_n(t))\Big(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t}+p_n(t))\Big).$$

(b) En déduire que $0 \leq p_n(t) \leq \sqrt{t}$ *pour tout* $t\in[0,1]$ *et tout* $n\in\mathbb{N}$*.*

3. (a) Soit $t\in[0,1]$ *fixé. Montrer que la suite* $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

(b) En déduire que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une limite que l'on déterminera.*

4. (a) En utilisant la relation du 2.(a), montrer que pour tout $t\in[0,1]$ *et tout* $n\in\mathbb{N}$*, on a*

$$0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \sqrt{t}\Big(1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}\Big)^n.$$

(b) Soit $n\geq 1$ *fixé. En étudiant la fonction* $g : [0,1]\to\mathbb{R}$ *définie par* $g(x) = x(1-\frac{x}{2})^n$*, montrer que*

$$|p_n(t) - f(t)| \leq \frac{2}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n, \qquad \text{pour tout } t\in[0,1].$$

5. Montrer que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$*.*

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $k > 0$ avec

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq k, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$.
1. En écrivant $2^{n+1} = 2^n + 2^n$, montrer que

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{k}{2^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq \frac{k}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
4. Montrer que g vérifie

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

5. En déduire que $g(x) = xg(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : on pourra d'abord montrer que $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\, g(1)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$.

Exercice 11.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 12.

Soit α un nombre réel positif ou nul, et (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^\alpha}$.
(a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$.

(b) Dans les deux cas $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, étudier la convergence de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite converge-t-elle vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$. ?

Exercice 13.

Soit $(f_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$

Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement, puis uniformément sur $\mathbb{R}^+$.