MA301 Analyse II

Séries de fonctions TD 4

Exercice 1.

Déterminer la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

1. $u_n(x) = x^n(1 - x^n),\ n \geq 0,\ x \in [0, 1],$
2. $v_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + nx^2)},\ n \geq 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Exercice 2.

Etudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

1. $u_n(x) = \dfrac{\sin(2^n \pi x)}{2^n},\ n \geq 0,$
2. $v_n(x) = e^{-n^2 x},\ n \geq 0,$
3. $w_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2},\ n \geq 1.$

Exercice 3.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0, +\infty[$ *par* $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2 + n^2}$.

(a) *Soit* $M > 0$. *Montrer que la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge normalement sur* $[0, M]$.

(b) *En déduire que la fonction somme* $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.

(c) *Etudier la convergence de la série de fonctions* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n f_n$ *sur* $[0, +\infty[$.

Exercice 4.

Montrer que la série de fonctions définie par son terme général $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$, *pour* $n \geq 1$, *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$, *on note* f *sa somme. Exprimer* $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ *comme somme d'une série numérique.*

Exercice 5.

Soit $f_n(x) = e^{-nx} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$, *pour* $n \geq 1$, *le terme général d'une série de fonctions définies sur* $[0, +\infty[$.
Montrer qu'elle converge simplement vers une fonction f *dérivable et que* $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

Exercice 6.

Determiner la convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

1. $u_n(x) = x^n(1-x),\ n \geq 0,\ x \in [0,1],$
2. $v_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x},\ n \geq 1,\ x \in [0,+\infty[,$
3. $w_n(x) = \dfrac{1}{x}\chi_{[n,n+1[},\ n \geq 1,\ x \in [0,+\infty[.$

Exercice 7.

Soit la série de fonctions, de terme général $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^p}$, *pour* $n \geq 1$.

(a) Montrer que si $p > 1$, *elle converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

(b) Soient $0 < p \leq 1$, $2k\pi < \alpha < \beta < 2(k+1)\pi$. *Montrer que la convergence est uniforme sur* $[\alpha, \beta]$.

Exercice 8.

Etudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions :

1. $t_n(x) = \dfrac{e^{-n^2x^2}}{n^2},\ n \geq 1,$
2. $s_n(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}},\ n \geq 1,$
3. $z_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{e^{nx}},\ n \geq 0.$

Exercice 9.

On considère la série de fonctions définies sur $[0,1]$ *par le terme général* $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^3(1+x^n)}$, *pour* $n \geq 1$.

(a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0,1]$.

(b) La fonction $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, *est-elle dérivable sur* $[0,1]$ *?*

Exercice 10.

Soit $|a| < 1$. *Soit* (f_n) *la suite de fonctions définies sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *par* $f_n(x) = \cos(x)^n a^n$, *pour* $n \geq 0$.

(a) Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformément sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a\cos(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx.$

Exercice 11.

Soit $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$, *pour* $n \geq 1$, *le terme général d'une série de fonctions définies sur* $[0,1]$.

(a) Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0,1]$.

(b) Montrer que la fonction $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *est dérivable, calculer sa dérivée sous forme d'une série.*

(c) Calculer la valeur de la dérivée $f'(x)$ *au point* $x = 1$.

Exercice 12.

Soit (f_n) *la suite de fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$, *pour* $n \geq 1$.

(a) Montrer que la série des fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}$.

(b) On note S *sa somme. Montrer que* $\int_0^1 S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-\cos(n))}{n^4}$.

(c) Montrer que $\int_0^{\pi} S(x)dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^4}$.

Exercice 13.

Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + n^3x^2}$, *pour* $n \geq 1$, *le terme général d'une série de fonctions. Montrer qu'elle converge sur tout* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *dérivable.*