# MA301 Analyse II - Devoir 1
# A rendre au plus tard le 13 Octobre 2008

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites de nombres réels. Pour tout $n \geq 0$, on définit :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

- Le but de l'exercice 1 est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1**

*Si les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ sont absolument convergentes, alors la série de terme général $w_n$ est absolument convergente et de plus, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Remarque : Pour des raisons évidentes à la vue de ce résultat, la série de terme général $w_n$ ainsi construite est appelée **série produit** des séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

- L'exercice 2 propose quelques applications du Théorème 1.

**Exercice 1**

*On suppose que les séries de termes généraux $u_n$ et $v_n$ sont absolument convergentes.*

1. *Montrer par récurrence que pour tout $M \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=0}^{M} w_n = \sum_{n=0}^{M} \left[u_n \left(\sum_{k=0}^{M-n} v_k\right)\right]. \tag{1}$$

2. *On suppose dans cette question que tous les $u_n$ et les $v_n$ sont positifs.*
   (a) *Montrer, à l'aide de la première question, l'inégalité suivante*

$$\forall\ N \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=0}^{N} w_n \leq \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right). \tag{$*$}$$

   (b) *A l'aide de la question 1, montrer que*

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n \geq \sum_{n=0}^{N} \left[u_n \left(\sum_{k=0}^{2N-n} v_k\right)\right].$$

   *En étudiant les valeurs que peut prendre l'entier $2N-n$ quand $0 \leq n \leq N$, en déduire que*

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n \geq \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right). \tag{$**$}$$

   (c) *Montrer, en utilisant les deux questions précédentes, que les sommes partielles $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} w_n$ ont une limite finie.*
   (d) *En déduire que la série produit, de terme général $w_n$, converge.*
   (e) *Déterminer sa somme à partir de $(*)$ et $(**)$.*

3. *On se place maintenant dans le cas où* $u_n$ *et* $v_n$ *ont un signe quelconque. On pose* $a_n = |u_n|$, $b_n = |v_n|$ *et* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
   (a) *Montrer que*
   $$|w_n| \leq c_n.$$
   (b) *En déduire que la série produit, de terme général* $w_n$, *est absolument convergente.*
   (c) *Toujours en utilisant* (1), *prouver l'inégalité suivante :*
   $$\left| \left( \sum_{n=0}^{N} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{N} v_n \right) - \sum_{n=0}^{N} w_n \right| \leq \left( \sum_{n=0}^{N} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{N} b_n \right) - \sum_{n=0}^{N} c_n.$$
   (d) *Conclure que*
   $$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

**Exercice 2**

*Soit* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $|a| < 1$. *On pose* $u_n = a^n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

1. *Calculer explicitement, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la quantité* $\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.
2. *En appliquant le Théorème 1 que l'on vient de démontrer, prouver que*
   $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$
3. *Démontrer que la série de terme général* $n^2 a^n$ *est absolument convergente pour tout* $|a| < 1$ *et calculer sa somme.*
   **Indication :** *On pourra poser* $v_n = n a^n$ *et considérer la série produit des séries de termes généraux* $u_n$ *et* $v_n$.