Université Paul Cézanne

MA 301 - Devoir maison n$^0$ 2

Licence MI - Semestre 3 - 2008-09

**Problème 1.** Le but de ce problème est de calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du$.

1. Montrer que l'intégrale généralisée
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
est convergente et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$
2. On note $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-(1+t^2)x)}{1+t^2}\,dt.$$
   (a) Justifier que $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $F(0)$.
   (c) Montrer que pour tout réel $x$ positif, on a
$$\frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}.$$
   (d) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
3. On va prouver dans cette question que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée. Pour $x \in R$, on pose
$$G(x) = \int_0^1 \exp(-(1+t^2)x)dt.$$
   (a) Soit $a$ un réel positif. Montrer que pour tout $h \in [-1,1]$, on a
$$\left|e^{-ah} - 1 + ah\right| \leq \frac{a^2h^2}{2}e^a.$$
   (b) En déduire que pour tout réel $x$ et tout $h \in [-1,1]$, on a
$$|F(x+h) - F(x) + hG(x)| \leq h^2e^{2-x}.$$
   (c) En déduire que $F$ est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée en fonction de $G$.
4. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\varphi(x) = 2F\left(\frac{x^2}{2}\right) + \left(\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)^2.$$

(a) Montrer que $\varphi$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.
(b) En déduire que $\varphi$ est constante sur $[0,+\infty[$. Calculer sa valeur.
(c) En déduire la valeur de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du.$$

*Corrigé du Problème 1.* 1. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on peut montrer que $0 \leq e^{-\frac{u^2}{2}} \leq \dfrac{2e^{-\frac{1}{2}}}{1+u^2}$. En effet, en étudiant la fonction $g$ définie sur $[0,+\infty[$ définie par $g(t) = (1+t)e^{-\frac{t}{2}}$, on voit facilement que $g(t) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ pour tout $t \geq 0$. Ce qui donne $g(u^2) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Ainsi, comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\, du$ est convergente (et vaut $\pi$, on calcule facilement une primitive), par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ est elle aussi convergente.

D'autre part, pour tout $A > 0$, comme la fonction $u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}$ est paire, on a

$$\int_{-A}^{A} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_0^A e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

En faisant tendre $A$ vers $+\infty$, on obtient le résultat demandé.

2. $(a)$ À $x$ fixé dans $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\exp(-(1+t^2)x)}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable.

2. $(b)$ On a

$$F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. $(c)$ Pour $x \geq 0$, on a pour tout $t \in [0,1]$ : $x \leq (1+t^2)x \leq 2x$, ce qui donne

$$e^{-2x}\,\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{\exp(-(1+t^2)x)}{1+t^2} \leq e^{-x}\,\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in [0,1].$$

Ainsi, en intégrant (en $t$) ces deux inégalités sur $[0,1]$, on obtient pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{\pi}{4}\, e^{-2x} \leq \int_0^1 \frac{\exp(-(1+t^2)x)}{1+t^2}\, dt \leq \frac{\pi}{4}\, e^{-x}.$$

2. $(d)$ Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$, on déduit de l'inégalité précédente que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

3. $(a)$ Soit $a > 0$. La formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral pour la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-at}$ nous donne :

$$e^{-ah} = 1 - ah + \int_0^h a^2(h-t)e^{-at}dt.$$

Ainsi, on a pour tout $h \in [-1,1]$

$$|e^{-ah} - 1 + ah| \leq e^a \int_0^h a^2(h-t)dt = e^a\, a^2\, \frac{h^2}{2},$$

ce qui donne l'estimation demandée.

3. $(b)$ D'après l'inégalité prouvée au 3. $(a)$, on a pour tout $t \in [0,1]$, en posant $a = 1+t^2$, et pour tout $h \in [-1,1]$,

$$\left|e^{-(1+t^2)h} - 1 + h(1+t^2)\right| \leq \frac{(1+t^2)^2h^2}{2}\, e^{1+t^2}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\left|F(x+h) - F(x) + hG(x)\right| &\leq \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\left|e^{-(1+t^2)h} - 1 + h(1+t^2)\right| dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\, \frac{(1+t^2)^2h^2}{2}\, e^{1+t^2}\, dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{h^2}{2}\, 2e^{2-x}\, dt \;=\; h^2e^{2-x}.
\end{aligned}$$

3. $(c)$ D'après l'inégalité précédente, on en déduit, d'après la définition de la dérivabilité d'une fonction, que $F$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que sa dérivée en un point $x \in [0,+\infty[$ vaut $F'(x) = -G(x)$.

4. $(a)$ La fonction $F$ est dérivable sur $[0,+\infty[$, c'est ce qu'on a montré dans la question 3. D'autre part, la fonction $t \mapsto \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ est elle aussi dérivable (sur $\mathbb{R}$) comme primitive (s'annulant en 0) d'une

fonction continue. Ainsi, la fonction $\varphi$ proposée est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et produit de fonctions dérivables. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2tF'\Big(\frac{t^2}{2}\Big) + 2e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= -2tG\Big(\frac{t^2}{2}\Big) + 2e^{-\frac{t^2}{2}} \int_0^1 \exp\Big(-\frac{t^2v^2}{2}\Big)\, tdv \\ &= -2tG\Big(\frac{t^2}{2}\Big) + 2t\int_0^1 \exp\Big(-\frac{(1+t^2)v^2}{2}\Big)\, dv \ = \ 0.\end{aligned}$$

Pour passer de la première égalité à la deuxième, on a fait le changement de variable $v = \frac{u}{t}$.

4. $(b)$ On en déduit donc que $\varphi$ est constante sur $[0, +\infty[$, on a donc

$$\varphi(t) = \varphi(0) = 2F(0) = \frac{\pi}{2}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

4. $(c)$ Comme $\varphi$ est constante sur $[0, +\infty[$, on a

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} \Bigg(2F\Big(\frac{t^2}{2}\Big) + \Big(\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\Big)^2\Bigg).$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} F(u) = 0$ d'après la question 2. $(d)$ et comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$ est convergente d'après la question 1, on en déduit que

$$\Big(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\Big)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}$. □

**Problème 2** (Intégrales de Bertrand)**.** Le but de ce problème est de déterminer la nature des intégrales du type

$$K_{\alpha,\beta} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}\, dx, \quad L_{\alpha,\beta} = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}\, dx,$$
$$I_{\alpha,\beta} = \int_1^e \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx \quad \text{et} \quad J_{\alpha,\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx$$

en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $(a)$ Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les intégrales généralisées $L_{\alpha,\beta}$ et $I_{2-\alpha,\beta}$ sont de même nature et que si elles convergent, alors elles ont la même valeur.
   $(b)$ Montrer que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les intégrales généralisées $K_{\alpha,\beta}$ et $J_{2-\alpha,\beta}$ sont de même nature et que si elles convergent, alors elles ont la même valeur.
2. Le but de cette question est de déterminer la nature de l'intégrale $I_{\alpha,\beta}$.
   $(a)$ Montrer que si $\beta \leq 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ est continue sur $[1, e]$. En déduire que $I_{\alpha,\beta}$ est alors convergente.
   $(b)$ On suppose maintenant que $\beta > 0$.
      $(i)$ Montrer que $I_{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$. On pourra penser à faire un changement de variable $u = \ln x$.
      $(ii)$ Montrer que si $\alpha > 1$, alors pour tout $x \in ]1, e]$ on a
      $$\frac{1}{e^{\alpha-1}}\ \frac{1}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x(\ln x)^\beta}.$$
      En déduire que $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.
      $(iii)$ Montrer que si $\alpha < 1$, alors pour tout $x \in ]1, e]$ on a
      $$\frac{1}{x(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} \leq e^{1-\alpha}\ \frac{1}{x(\ln x)^\beta}.$$
   En déduire que $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

(*c*) Déterminer tous les $(\alpha, \beta)$ pour lesquels $I_{\alpha,\beta}$ converge.

3. Le but de cette question est de déterminer la nature de l'intégrale $J_{\alpha,\beta}$.
   (*a*) Montrer que si $\alpha < 0$, alors $J_{\alpha,\beta}$ est divergente pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
   (*b*) Montrer que $J_{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. On pourra penser à faire un changement de variable $u = \ln x$.
   (*c*) On suppose maintenant que $0 \leq \alpha < 1$.
      (*i*) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors $J_{\alpha,\beta}$ est divergente.
      (*ii*) Soit $\beta > 0$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta} \geq M$, pour tout $x \geq e$.
      En écrivant $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}} \dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta}$, en déduire que $J_{\alpha,\beta}$ est divergente.
   (*d*) On suppose ici que $\alpha > 1$.
      (*i*) Montrer que si $\beta \geq 0$, alors $J_{\alpha,\beta}$ est convergente.
      (*ii*) Soit $\beta < 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\dfrac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} \leq m$ pour tout $x \geq e$.
      En écrivant $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}} \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta}$, en déduire que $J_{\alpha,\beta}$ est convergente.
   (*e*) Déterminer tous les $(\alpha, \beta)$ pour lesquels $J_{\alpha,\beta}$ converge.

4. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx$ est convergente.

*Corrigé du Problème 2.* 1. (*a*) Les intégrales $I_{\alpha,\beta}$ sont éventuellement généralisées en 1, de même que les intégrales $L_{\alpha,\beta}$. Pour $a \in ]1, e[$, on a, après un changement de variable $u = \frac{1}{x}$ :

$$\int_a^e \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\, dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{u^{2-\alpha} |\ln u|^\beta}\, du.$$

Ainsi, l'intégrale de gauche converge lorsque $a \to 1^+$ si et seulement si l'intégrale de droite converge lorsque $b = \frac{1}{a} \to 1^-$. Ainsi, $I_{\alpha,\beta}$ et $L_{2-\alpha,\beta}$ sont de même nature et d'après l'égalité précédente, lorsque ces intégrales sont convergentes, on a $I_{\alpha,\beta} = L_{2-\alpha,\beta}$.

1. (*b*) Le raisonnement pour $J_{\alpha,\beta}$ et $K_{\alpha,\beta}$ est le même que précédemment, l'intégrale $J_{\alpha,\beta}$ étant généralisée en $+\infty$ et $K_{\alpha,\beta}$ étant généralisée en 0. En effectuant le même changement de variable qu'en 1. (*a*), on obtient que $J_{\alpha,\beta}$ et $K_{2-\alpha,\beta}$ sont de même nature et que lorsque ces intégrales convergent, elles sont égales.

2. (*c*) L'intégrale généralisée $I_{\alpha,\beta}$ est
   - convergente pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times ]-\infty, 1[$
   - divergente pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty[$.

3. (*a*) Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Lorsque $\alpha < 0$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = +\infty$, donc il existe un $A > e$ tel que pour tout $x \geq A$, $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \geq 1$. Ainsi, l'intégrale sur $[e, +\infty[$ est divergente.

3. (*b*) Pour $a \in ]e, +\infty[$, on a, en faisant le changement de variable $u = \ln x$ dans l'intégrale :

$$\int_e^a \frac{1}{x (\ln x)^\beta}\, dx = \int_1^{\ln a} \frac{1}{u^\beta}\, du.$$

Comme $a \to +\infty$ si et seulement si $\ln a \to +\infty$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^\beta}\, du$ converge si et seulement si $\beta > 1$, on en conclut que l'intégrale $J_{1,\beta}$ converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$.

3. (*c*) (*i*) Soit $0 \leq \alpha < 1$. Si $\beta \leq 0$, alors on a pour tout $x \geq e$ : $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} \geq \dfrac{1}{x^\alpha}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ est divergente ($\alpha < 1$), on en déduit par comparaison que $J_{\alpha,\beta}$ est divergente.

3. $(c)$ $(ii)$ On a toujours $0 \leq \alpha < 1$. Alors $\frac{1-\alpha}{2} > 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta} = +\infty$. Ainsi, il existe $A > e$ tel que pour tout $x \geq A$, on a $\dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta} \geq 1$. D'autre part, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta}$ est strictement positive et continue sur $[e, A]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, donc cette fonction y atteint ses bornes. On appelle $\mu$ son minimum : pour tout $x \in [e, A]$, $f(x) \geq \mu = f(x_0) > 0$ ($x_0 \in [e, A]$). En posant $M = \min\{\mu, 1\}$, on obtient la minoration demandée. On a alors $\dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} = \dfrac{f(x)}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ et donc $\dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} \geq \dfrac{M}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Comme $\frac{1+\alpha}{2} < 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\,dx$ est divergente. Par comparaison, on en déduit alors que $J_{\alpha,\beta}$ est divergente.

3. $(d)$ $(i)$ Pour $\alpha > 1$, si $\beta \geq 0$, on a pour tout $x \geq e$ : $0 \leq \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ est convergente. Donc par comparaison, on en déduit que $J_{\alpha,\beta}$ est convergente.

3. $(d)$ $(ii)$ On a toujours $\alpha > 1$ et maintenant, $\beta < 0$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln x)^\beta} = 0$. Ainsi, il existe $A > e$ tel que pour tout $x \geq A$, on a $\dfrac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}}(\ln x)^\beta} \leq 1$. D'autre part, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^{\frac{1-\alpha}{2}}(\ln x)^\beta}$ est continue sur $[e, A]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, donc cette fonction y atteint ses bornes. On appelle $\lambda$ son maximum : pour tout $x \in [e, A]$, $g(x) \leq \lambda = g(x_1)$ ($x_1 \in [e, A]$). En posant $m = \max\{\lambda, 1\}$, on obtient la majoration demandée. On a alors $\dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} = \dfrac{g(x)}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ et donc $0 \leq \dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta} \leq \dfrac{m}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$. Comme $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\,dx$ est convergente. Par comparaison, on en déduit alors que $J_{\alpha,\beta}$ est convergente.

3. $(e)$ On vient de montrer que l'intégrale généralisée $J_{\alpha,\beta}$ est
- convergente pour $(\alpha, \beta) \in ]1, +\infty[\times\mathbb{R} \cup \{1\}\times]1, +\infty[$
- divergente pour $(\alpha, \beta) \in ]-\infty, 1[\times\mathbb{R} \cup \{1\}\times]-\infty, 1]$.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\,dx$ est convergente si et seulement si les quatre intégrales $I_{\alpha,\beta}$, $J_{\alpha,\beta}$, $K_{\alpha,\beta}$ et $L_{\alpha,\beta}$ sont convergentes en même temps. On a vu dans la question 2 que $I_{\alpha,\beta}$ était convergente si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta < 1$. Dans la question 1, on a vu que $L_{\alpha,\beta}$ et $I_{2-\alpha,\beta}$ étaient de même nature. Donc $L_{\alpha,\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta < 1$. D'après la question 3, $J_{\alpha,\beta}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. En prenant l'intersection des domaines où les trois intégrales $I_{\alpha,\beta}$, $J_{\alpha,\beta}$ et $L_{\alpha,\beta}$ sont convergentes, il ne reste que les cas $\alpha > 1$ et $\beta < 1$. Enfin, les $(\alpha, \beta)$ pour lesquels l'intégrale $K_{\alpha,\beta}$ est convergente sont exactement ceux qui vérifient $(2 - \alpha, \beta) \in ]1, +\infty[\times\mathbb{R} \cup \{1\}\times]1, +\infty[$ d'après la question 1, c'est-à-dire $\alpha < 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. Ainsi, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\,dx$ n'est jamais convergente. $\square$