MA301 Analyse II - Devoir 2
A rendre au plus tard le 12 Décembre 2008

N.B. : Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1

Le but de ce problème est de calculer la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

1. *Montrer que l'intégrale généralisée*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
est convergente et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$
2. *On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-(1+t^2)x)}{1+t^2}\, dt.$$
   (a) *Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.*

   (b) *Calculer $F(0)$.*

   (c) *Montrer que pour tout réel x positif, on a*
$$\frac{\pi}{4}e^{-2x} \leq F(x) \leq \frac{\pi}{4}e^{-x}.$$
   (d) *En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.*
3. *On va prouver dans cette question que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa dérivée. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose*
$$G(x) = \int_0^1 \exp(-(1+t^2)x)dt.$$
   (a) *Soit a un réel positif. Montrer que pour tout $h \in [-1,1]$, on a*
$$\left|e^{-ah} - 1 + ah\right| \leq \frac{a^2h^2}{2}e^a.$$
   (b) *En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ et tout $h \in [-1,1]$, on a*
$$|F(x+h) - F(x) + hG(x)| \leq h^2 e^{2-x}.$$
   (c) *En déduire que F est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^+$ et déterminer sa dérivée en fonction de G.*

4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(t) = 2F\left(\frac{t^2}{2}\right) + \left(\int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right)^2.$$

(a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

(b) En déduire que φ est constante sur $\mathbb{R}^+$. Calculer sa valeur.

(c) En déduire la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Exercice 2

Le but de l'exercice est l'étude des intégrales généralisées données par

$$J_{\alpha,\beta} = \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}\,dx, \quad K_{\alpha,\beta} = \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{1}{x^\alpha |\ln x|^\beta}\,dx,$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. *Le but de cette question est de déterminer la nature de l'intégrale $J_{\alpha,\beta}$.*

   (a) Montrer que si $\alpha < 0$, alors $J_{\alpha,\beta}$ est divergente pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que $J_{1,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$. On pourra penser à faire un changement de variable $u = \ln x$.

   (c) On suppose maintenant que $0 \leq \alpha < 1$.

   i. Montrer que si $\beta \leq 0$, alors $J_{\alpha,\beta}$ est divergente.

   ii. Soit $\beta > 0$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta} \geq M$, pour tout $x \geq e$.

   En écrivant $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}} \dfrac{x^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln x)^\beta}$, en déduire que $J_{\alpha,\beta}$ est divergente.

   (d) On suppose ici que $\alpha > 1$.

   i. Montrer que si $\beta \geq 0$, alors $J_{\alpha,\beta}$ est convergente.

   ii. Soit $\beta < 0$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\dfrac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta} \leq m$ pour tout $x \geq e$.

   En écrivant $\dfrac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} = \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}} \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln x)^\beta}$, en déduire que $J_{\alpha,\beta}$ est convergente.

   (e) Déterminer tous les (α, β) pour lesquels $J_{\alpha,\beta}$ converge.

2. *On s'intéresse dans cette question à l'intégrale $K_{\alpha,\beta}$.*

   (a) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrer que les intégrales généralisées $K_{\alpha,\beta}$ et $J_{2-\alpha,\beta}$ sont de même nature. On pourra procéder à un changement de variable.

   (b) Montrer que dans le cas où les deux intégrales $K_{\alpha,\beta}$ et $J_{2-\alpha,\beta}$ sont convergentes, elles ont la même valeur.