Ni calculatrices, ni documents. 3 heures.

Exercice I. (Cours)

1. Donner la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

2. Montrer que la limite uniforme sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues est continue.

Exercice II. **1.** Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ln(\frac{2+n^2}{1+n^2})$.

2. Montrer que la série $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$ converge.

3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,dt$ est convergente.

4. Montrer que la suite des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et préciser sa limite.

Exercice III. On se propose de démontrer que l'intégrale $I = \int_0^1 \sin(\ln x)\,dx$ est convergente et de la calculer.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(\ln x)$ est intégrable sur tout intervalle $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$.

2. Convergence en 0.

a. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(\ln x)$ est bornée sur $]0; 1]$.

b. En déduire, en utilisant le critère de Cauchy, que $\int_0^1 \sin(\ln x)\,dx$ est convergente.

3. Calcul de I.

a. Soit $0 < a < 1$, En intégrant par parties montrer que

$$\int_a^1 \sin(\ln x)\,dx = -a\sin(\ln a) - \int_a^1 \cos(\ln x)\,dx$$

b. En déduire que $\int_0^1 \cos(\ln x)\,dx$ est convergente et donner sa valeur en fonction de I.

c. En intégrant une nouvelle fois par parties, montrer que $I = \frac{-1}{2}$.

Exercice IV. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{array} \right.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note h sa somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$$

2. a. Soit $M > 0$, montrer que la série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-M; M]$.

b. En déduire que h est continue sur $\mathbb{R}$.

3. a. Montrer que la série des fonctions dérivées $\sum_{n \geq 0} f_n'$ converge normalement sur $[-M; M]$ pour tout $M > 0$.

b. En déduire que h est dérivable et donner une expression de h' sous la forme d'une série de fonctions.

4. Montrer de même que la fonction h' est dérivable et que l'on a $h''(x) = -h(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

5. a. Calculer $h(0)$ et $h'(0)$.

b. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.

c. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \sin x$