Ni calculatrices, ni documents. 2 heures.

Exercice I. (Cours, 6 points)

1. Donner la définition d'une série convergente.

2. Énoncer et démontrer le critère de convergence de D'Alembert.

Exercice II. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **2.** $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ **3.** $u_n = \frac{n}{2^n}$ **4.** $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$.

Exercice III. Pour un réel $s \in \mathbb{R}_+^*$ on considère la série $\sum \frac{\sin n}{n^s}$.

1. Montrer que si $s > 1$ la série est absolument convergente.

2. a. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k$.

b. En déduire que pour $0 < s \leq 1$ la série est convergente.

Exercice IV. On définit les suites $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ en posant

$$a_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\sqrt{k})} \quad \text{et} \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{avec } 0! = 1$$

1. Exprimer $\ln(\sqrt{N}a_N)$ en fonction des sommes partielles de la série de terme général u_n.

2. Montrer que la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$.

3. En déduire que la suite $(\sqrt{n}a_n)_n$ a une limite. Quelle est la valeur de la limite ?

4. Démontrer l'égalité pour tout $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \sqrt{n}a_n - \sqrt{n+1}a_{n+1}.$$

5. En déduire la valeur des sommes partielles de la série de terme général a_n.

6. En déduire que la série de terme général a_n est convergente et calculer sa somme.

Corrigé

Exercice II

1. Pour tout $n \geq 2$, on a $0 < \sqrt{n+1} \leq n$ et donc $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n}$. Comme on sait que la série harmonique diverge, par comparaison on en déduit que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est divergente.

2. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq 0$ et $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série divergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ est divergente.

3. Pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$. On étudie alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

D'après le critère de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq 0$ et comme $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ lorsque x est au voisinage de 0, on a

$$u_n \sim \frac{1}{2n^2} \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Comme $\frac{1}{2n^2}$ est le terme général d'une série convergente, la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice III

1. Pour tout $n \geq 1$, on a $\left|\frac{\sin n}{n^s}\right| \leq \frac{1}{n^s}$. Si $s > 1$, $\frac{1}{n^s}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc par comparaison, la série $\sum \frac{\sin n}{n^s}$ est absolument convergente.

2. a. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \sum_{k=1}^{n} \Im m(e^{ik}).$$

Or, en utilisant l'expression de la somme d'une suite géométrique de raison $e^i \neq 1$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (e^i)^k\Big) = e^i\,\frac{1-(e^i)^n}{1-e^i} = e^i\,\frac{e^{i\frac{n}{2}}(-2i\sin\frac{n}{2})}{e^{\frac{i}{2}}(-2i\sin\frac{1}{2})} = e^{\frac{(n+1)i}{2}}\,\frac{\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

Ce qui donne finalement

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\sin\frac{n}{2}}{\sin\frac{1}{2}}.$$

b. Pour tout $n \geq 1$, on a d'après le **a.** : $\left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| \leq \frac{1}{\sin 12}$. D'autre part, si $s \in]0,1]$, la suite $(\frac{1}{n^s})_{n\geq 1}$ est décroissante vers 0. On peut alors appliquer de théorème d'Abel pour conclure à la convergence de la série $\sum \frac{\sin n}{n^s}$ lorsque $s \in]0,1]$.

Exercice IV

1. Pour tout $N \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\ln(\sqrt{N}\,a_N) &= \ln\Big(\prod_{n=1}^{N}\sqrt{n}\Big) - \ln\Big(\prod_{n=1}^{N}(1+\sqrt{n})\Big) \\
&= -\ln\Big(\prod_{n=1}^{N}\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\Big) \\
&= -\sum_{n=1}^{N}\ln\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = -\sum_{n=1}^{N} u_n.
\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq 0$ et $u_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Comme la série harmonique est divergente, la série $\sum u_n$ est elle aussi divergente. Comme chaque terme u_n de la série est positif, la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$.

3. Comme $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, on en déduit que

$$-\sum_{n=1}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\infty.$$

D'après l'égalité trouvée en **1**, on en déduit alors que

$$\sqrt{N}\, a_N = \exp\Big(-\sum_{n=1}^{N} u_n\Big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

4. On a pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\, a_n - \sqrt{n+1}\, a_{n+1} &= \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{k=1}^{n}(1+\sqrt{k})} - \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1+\sqrt{k})} \\
&= \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1+\sqrt{k})}\Big((1+\sqrt{n+1}) - \sqrt{n+1}\Big) \\
&= \frac{\sqrt{n!}}{\prod_{k=1}^{n+1}(1+\sqrt{k})} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

5. On a ainsi, d'après l'égalité précédente

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} a_n &= a_1 + \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1} \\
&= a_1 + \sum_{n=1}^{N-1} \Big(\sqrt{n}\, a_n - \sqrt{n+1}\, a_{n+1}\Big) \\
&= a_1 + a_1 - \sqrt{N}\, a_N = 1 - \sqrt{N}\, a_N
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'expression de la somme partielle d'une suite télescopique et le fait que $a_1 = \frac{1}{2}$.

6. On a vu à la question **3.** que $\sqrt{N}\, a_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, ce qui implique que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = 1 - \sqrt{N}\, a_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, la série de terme général a_n est convergente vers 1.