Ni calculatrices, ni documents. 2 heures.

Exercice I. **(Cours, 6 points)**

1. Donner la définition d'une série convergente.

2. Énoncer et démontrer le critère de convergence de D'ALEMBERT.

Exercice II. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ **2.** $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ **3.** $u_n = \frac{n}{2^n}$ **4.** $u_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$.

Exercice III. Pour un réel $s \in \mathbb{R}_+^*$ on considère la série $\sum \frac{\sin n}{n^s}$.

1. Montrer que si $s > 1$ la série est absolument convergente.

2. **a.** Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k$.

b. En déduire que pour $0 < s \leq 1$ la série est convergente.

Exercice IV. On définit les suites $(a_n)_{n\geq1}$ et $(u_n)_{n\geq1}$ en posant

$$a_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+\sqrt{k})} \quad \text{et} \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad \text{avec } 0! = 1$$

1. Exprimer $\ln(\sqrt{N} a_N)$ en fonction des sommes partielles de la série de terme général u_n.

2. Montrer que la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$.

3. En déduire que la suite $(\sqrt{n} a_n)_n$ a une limite. Quelle est la valeur de la limite ?

4. Démontrer l'égalité pour tout $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \sqrt{n} a_n - \sqrt{n+1} a_{n+1}.$$

5. En déduire la valeur des sommes partielles de la série de terme général a_n.

6. En déduire que la série de terme général a_n est convergente et calculer sa somme.