MA301 Analyse II - Examen de rattrapage - Septembre 2009
Ni calculatrices, ni documents - Durée : 3h

Exercice 1

1. *Donner la définition de la convergence normale, sur un intervalle* I*, d'une série de fonctions* $x \in I \mapsto \sum_{n\geq 0} u_n(x)$.
2. *Enoncer le théorème de convergence des séries alternées.*

Exercice 2

Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$$

$$J = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,dx.$$

Exercice 3

On se donne un réel $a \in \mathbb{R}$*. On souhaite déterminer la nature de la série numérique*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n}.$$

1. *Montrer que si* $|a| > 1$*, la série considérée est divergente.*
2. *Montrer que si* $0 \leq a < 1$*, la série considérée est convergente.*
3. *Montrer que si* $-1 < a < 0$*, la série considérée est absolument convergente. Conclure.*
4. *Etudier le cas* $a = 1$.
5. *Etudier le cas* $a = -1$.

Exercice 4

1. (a) *Démontrer l'inégalité suivante*

$$\forall y > 0, \quad \ln(y) \leq y - 1.$$

   (b) *Calculer la limite suivante*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

2. *On considère la suite de fonctions* $(f_n)_{n\geq 1}$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par*

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad \forall x \geq 0.$$

   (a) *Donner une expression de* $f_n(x)$ *faisant intervenir les fonctions* exponentielle *et* logarithme.

   (b) *Démontrer que la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers la fonction* f *définie par*

$$f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x) = e^x.$$

   (c) i. *Montrer que la fonction* g_n *définie par* $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$, *est positive et croissante sur* $\mathbb{R}^+$.

   ii. *Soit* $A > 0$. *Déduire de la question précédente que la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* f *sur l'intervalle* $[0, A]$.

   (d) *Est-ce que la fonction* $f - f_n$ *est bornée sur* $\mathbb{R}^+$ *?*
   Que pensez-vous de la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *tout entier ?*

3. *On considère la suite de fonctions* $(\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$ *définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par*

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n, & \textit{pour } x \in [0, n], \\ 0, & \textit{pour } x > n. \end{cases}$$

   (a) *Donner l'allure du graphe de la fonction* $\tilde{f}_n$.

   (b) *Démontrer que* $(\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$ *vers la fonction* $\tilde{f}$ *définie par*

$$\tilde{f} : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \tilde{f}(x) = e^{-x}.$$

   (c) *Démontrer que la suite* $(\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers* $\tilde{f}$ *sur* $\mathbb{R}^+$.