Soit b une base (c'est-à-dire un entier positif ≥ 2). L'écriture en base b du nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est $(\epsilon, c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0, d_1 d_2 \cdots d_k \cdots)$ où $\epsilon = \pm 1$ est le signe de x ($\epsilon = 1$ si $x = 0$), n est la longueur de la partie entière de x ($n = \lfloor \ln(|x|)/\ln(b) \rfloor$), les c_k et les d_k sont des **chiffres** dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, et

$$x = \epsilon(\sum_{k=0}^{n} c_k b^k + \sum_{k=1}^{+\infty} d_k b^{-k})$$

Pour assurer l'unicité de l'écriture décimale on suppose de plus que $c_n \neq 0$ et que la suite de chiffres (d_k) n'est pas ultimement constante égale à $b-1$. Si la suite des chiffres (d_k) est ultimement constante égale à 0 ont dit que l'écriture est **finie**.

Exercice I. **1.** Écrire le nombre entier 61 en binaire (base $b = 2$). Écrire en décimal ($b = 10$) le nombre dont l'écriture hexadécimal (base $b = 16$) est $9A3$.

2. Donner l'algorithme permettant d'écrire un nombre entier naturel en base b.

3. Donner l'écriture décimale de $\frac{7}{250}$. Donner les 4 premiers chiffres binaires de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Colorier en rouge sur le segment $[0; 1]$ tous les nombres dont les deux premiers chiffres de leur écriture en base 3 sont différents de 1 ($d_1 \neq 1$ et $d_2 \neq 1$).

4. Donner l'algorithme permettant d'écrire en base b un nombre réel $x \in]0; 1[$.

Exercice II. On dit qu'une écriture $(\epsilon, c_n c_{n_1} \cdots c_1 c_0, d_1 d_2 \cdots d_k \cdots)$ en base b est **périodique** si il existe $p \in \mathbb{N}$ (la longueur du préfixe) et une période $T \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$\forall i, k \in \mathbb{N} \quad d_{p+i} = d_{p+i+kT}$$

La **partie périodique** de cette écriture est $d_p d_{p+1} \cdots d_{p+T-1}$.

Par exemple $17.24333333\cdots$ est périodique de période 3 avec un préfixe 17.24.

1. Donner la forme rationnelle du nombre dont l'écriture décimale est $17.24333333\cdots$ Donner l'écriture décimale de $\frac{25}{7}$.

2. Démontrer qu'un nombre x dont l'écriture en base b est périodique est un nombre rationnel.

3. Démontrer que l'écriture en base b d'un nombre rationnel est toujours périodique.

Exercice III. **1.** Donner l'écriture décimale de $7/8$ et de $-13/16$.

Soit $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et soit $x = \alpha/\beta$.

2. Montrer que l'écriture en base b de x est finie si et seulement si les facteurs premiers qui divisent β divisent aussi b.

On suppose maintenant que b et β sont premiers entre eux.

3. Montrer que si β divise $b^T - 1$, alors la longueur de la période de l'écriture en base b de x divise T.

4. Trouver $T \in \mathbb{N}^*$ tel que 7 divise $10^T - 1$.

5. Montrer que si β est premier alors β divise $b^{\beta-1} - 1$.