Durée 1h30. Tous documents et calculatrices interdits

Le sujet comporte trois questions de cours, trois exercices et un problème. Il sera tenu le plus grand compte du soin de la rédaction.

Cours 1. Donner la définition d'un idéal.

2. Pour quelles valeurs de n, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un anneau intègre ?

3. Pour quelles valeurs de n, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il un corps ?

Exercices 1. Dresser la liste des nombres premiers p tels que $p \leq 100$.

2. Soient a et b deux entiers qui divisent tous deux un entier n. Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors le produit ab divise n. Donner un contrer exemple à cette propriété dans le cas où a et b ne sont pas premiers entre eux.

3. Soit G un groupe noté multiplicativement, e l'élément neutre et $x \in G$. On suppose que $x^n = e$ et $x^m = e$, avec m et n premiers entre eux. Montrer que $x = e$.

Problème On se propose dans cet exercice de montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est principal. $\mathbb{Z}[i]$ est l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont des entiers :

$$\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2. Factoriser 5 dans $\mathbb{Z}[i]$.

3. Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ il existe $a \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - a| < 1$.

4. En déduire que pour tous nombres $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, $b \neq 0$ il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que

1. $a = bq + r$
2. $|r| < |b|$

5. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.