TD3

Exercice 1:

Soit $\star$ la loi de composition sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\text{pour tout } x, y \in \mathbb{R} \quad x \star y = x + y - xy.$$

1. Montrer que $\star$ est commutative et associative.
2. Montrer que $\star$ admet un élément neutre e que l'on précisera.
3. Montrer que tout élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ admet pour inverse $\frac{x}{x-1}$.
4. $(\mathbb{R}, \star)$ est-il un groupe? Même question pour $(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.
5. Calculer $x \star x \star \cdots \star x$ (n fois).

Exercice 2:

Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et $*$ la loi de composition définie sur G par:

$$\text{pour tout } (x, y), (x', y') \in G \quad (x, y) * (x', y') = (x'y + \frac{x}{y'}, yy').$$

1. Vérfier que $*$ est une loi interne de G.
2. La loi $*$ est-elle associative? Est-elle commutative?
3. A-t-on un élément neutre dans G?
4. $(G, *)$ est-il un groupe?

Exercice 3:

Soit E un ensemble. Montrer que l'ensemble des applications bijectives de E dans lui-même forme un groupe pour la loi de composition des applications.

Exercice 4:

Soit G un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien.

Exercice 5:

1. Montrer que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}, \times)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

Exercice 6:

Soit G un groupe noté multiplicativement. Montrer que le centre de G

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall\, y \in G,\ xy = yx\}$$

est un sous-groupe de G.

Exercice 7:

Soit G un groupe, H, K deux sous-groupe de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $H \cup K$ soit un sous-groupe de G.

Exercice 8:

1. Montrer que les application suivantes sont des morphismes de groupes:
   - a) $\ln : (\mathbb{R}_{>0}, \times) \to (\mathbb{R}, +)$,
   - b) $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \times)$,
   - c) $x \to x^3 : (\mathbb{R}, \times) \to (\mathbb{R}, +)$,
   - d) $\theta \to \exp(i\theta) : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{U}, \times)$,
   - e) $1 \to \exp(\frac{2i\pi}{n}) : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{U}_n, \times)$.
2. Lesquelles sont des isomorphismes de groupes?

Exercice 9:

Soit $(G, \top)$ un groupe.

1. Soit $(G', \perp)$ un groupe et $a \in G$. Montrer que l'application $f : G \to G'$ définie pour tout $x \in G$ par $f(x) = a \perp x$ est un morphisme de groupes.
2. Montrer que l'application g de G dans lui-même définie pour tout $x \in G$ par $g(x) = x'$, où x' désigne le symétrique de x, est un morphisme groupe.

Exercice 10:

Soient $(G, \top)$ et $(G, \perp)$ deux groupes et f un morphisme de groupes.

1. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $f(H)$ est un sous-groupe de G'.
2. Soit H' un sous-groupe de G'. Montrer que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

Exercice 11:

Soient $(G, \top)$ et $(G, \perp)$ deux groupes et f un isomorphisme de groupes. On suppose que G est abélien. Montrer que G' l'est aussi.

Exercice 12:

Soit G un groupe d'ordre fini (noté multiplicativement) et H un sous-groupe de G. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur G par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
2. Montrer que H peut s'obtenir comme une classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$.
3. Montrer que toutes les classes d'équivalence pour $\mathcal{R}$ ont le même cardinal
4. Montrer le théorème de Lagrange: L'ordre de H divise l'ordre de G.
5. En déduire que l'ordre d'un élément du groupe divise l'ordre du groupe.

Exercice 13:

Soit G un groupe fini d'ordre premier. Montrer que G admet exactement deux sous-groupes.

Exercice 14:

Déterminer (à isomorphismes près) tous les groupes d'ordre ≤ 5.