Ni calculatrices, ni documents. 1 heure 30.

Exercice I. **(Cours, 6 points)** Donner la définition de l'intégrale au sens de RIEMANN

Exercice II. Calculer en précisant le domaine de validité

1. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx$ **2.** $\displaystyle\int 3^{\sqrt{2t+1}}\,dt$ **3.** $\displaystyle\int x \ln x\,dx$

Exercice III. **1.** En reconnaissant une somme de RIEMANN (on précisera, la fonction, l'intervalle, la subdivision et les valeurs tests), calculer la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{k}.$$

2. En déduire que la série harmonique diverge vers $+\infty$.

Exercice IV. **1.** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$).

a. Montrer que si f est décroissante sur $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a)f(a).$$

b. Montrer que si f est concave sur $[a;b]$ alors

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. On considère la la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

a. Montrer que h est décroissante sur $[0;+\infty[$.

b. Montrer que h est concave sur l'intervalle $[0; \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

c. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{\sqrt{3}}{6n}\left(1 + \frac{2}{1+\frac{1}{3n^2}} + \frac{2}{1+\frac{2^2}{3n^2}} + \cdots + \frac{2}{1+\frac{(n-1)^2}{3n^2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) \leq \frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{3n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+\frac{k^2}{3n^2}}$$

3. En utilisant cette inégalité pour $n = 2$ donner un encadrement de π.