Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. **(Cours, 6 points)** Donner la définition de l'intégrale au sens de RIEMANN

Exercice II. Calculer **1.** $\int_{-1}^{1}(x^2-2x)e^x\,dx$ **2.** $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{e^x+1}$

1. Intégrons pas partie

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^2-2x & & u'(x) & = & 2x-2 \\ v'(x) & = & e^x & & v(x) & = & e^x \end{array}$$

Nous avons donc

$$\int_{-1}^{1}(x^2-2x)e^x\,dx = [(x^2-2x)e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(2x-2)e^x\,dx = \frac{-3}{e} - e + \int_{-1}^{1}2e^x\,dx - \int_{-1}^{1}2xe^x\,dx.$$

Intégrons par partie une nouvelle fois

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & 2x & & u'(x) & = & 2 \\ v'(x) & = & e^x & & v(x) & = & e^x \end{array}$$

Nous concluons que

$$\int_{-1}^{1}(x^2-2x)e^x\,dx = \frac{-3}{e} - e + 2e - \frac{2}{e} - [2xe^x]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}2e^x\,dx = e - \frac{5}{e} - 2e - \frac{2}{e} + 2e - \frac{2}{e} = e - \frac{9}{e}.$$

2. Effectuons le changement de variable $y = e^x$ et donc $dy = e^x\,dx = y\,dx$, on obtient

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{e^x+1} = \int_{x=-1}^{x=1}\frac{dy}{y(1+y)}.$$

$x \mapsto e^x$ est un homéomorphisme de $[-1;1]$ dans $[\frac{1}{e};e]$ de plus pour tout $y > 0$ on a $\frac{1}{y(1+y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}$ et donc

$$= \int_{y=\frac{1}{e}}^{y=e}(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y})\,dy = [\ln y - \ln(1+y)]_{\frac{1}{e}}^{e} = 1.$$

Exercice III. Calculer en précisant le domaine de validité $\int \arccos x\,dx$

La fonction $x \mapsto \arccos x$ est définie et continue sur l'intervalle $[-1;1]$ et est à valeurs dans $[0,\pi]$. On cherche donc des primitives sur cette intervalle. Posons $x = \cos\theta$ alors $dx = -\sin\theta\,d\theta$. Pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $\arccos\cos\theta = \theta$. On cherche donc les primitives :

$$\int -\theta\sin\theta\,d\theta = \theta\cos\theta - \int\cos\theta = \theta\cos\theta - \sin\theta$$

De plus, pour tout $\theta \in [0,\pi]$, $\sin\theta \geq 0$ et donc $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$. On obtient finalement

$$\int \arccos x\,dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}.$$

Les primitives de $x \mapsto \arccos x$ sur l'intervalle $[-1;1]$ sont les fonctions $x \mapsto x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ où C est une constante réelle.

Exercice IV. On considère la fonction $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\sin(\ln(x^2)) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$ puisqu'elle est le produit de composées de fonctions continues.
Nous constatons que $\forall x \neq 0$, $-1 \leq \sin(\ln(x^2)) \leq 1$ et comme x tend vers 0 en 0,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Ce qui prouve que f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

2. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Intégrons par parties sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \sin(\ln(x^2)) & & u'(x) & = & \frac{2}{x}\cos(\ln(x^2)) \\ v'(x) & = & x & & v(x) & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Nous obtenons

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \int x\cos(\ln(x^2))\,dx.$$

Intégrons de nouveau par parties sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \cos(\ln(x^2)) & & u'(x) & = & \frac{-2}{x}\sin(\ln(x^2)) \\ v'(x) & = & x & & v(x) & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Nous obtenons

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2)) - \int x\sin(\ln(x^2))\,dx.$$

De cette égalité nous tirons une primitive de f sur $]0,+\infty[$:

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2))).$$

Le calcul ci-dessus est aussi valide sur $]-\infty;0[$ et en recollant en 0 pour obtenir une fonction continue, nous obtenons que la fonction

$$F: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{4}(\sin(\ln(x^2)) - \cos(\ln(x^2))) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est une primitive de f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$. En 0 nous constatons que le taux d'accroissement de F :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{x}{4}(\sin(\ln(x^2)) - \cos(\ln(x^2))) \to_{x\to 0} 0$$

et donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$, ce qui nous permet de conclure que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

sujet A

Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. **(Cours, 6 points)** Montrer que toute fonction monotone sur un intervalle $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Exercice II. Calculer **1.** $\int_{-1}^{1}(x^2+2x)e^{-x}\,dx$. **2.** $\int_1^2 \frac{dx}{1-e^x}$

1. Intégrons pas partie

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x^2+2x & & u'(x) & = & 2x+2 \\ v'(x) & = & e^{-x} & & v(x) & = & -e^{-x} \end{array}$$

Nous avons donc

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2x)e^{-x}\,dx = [-(x^2+2x)e^{-x}]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(2x+2)e^{-x}\,dx = \frac{-3}{e}-e+\int_{-1}^{1}2e^{-x}\,dx+\int_{-1}^{1}2xe^{-x}\,dx.$$

Intégrons par partie une nouvelle fois

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & 2x & & u'(x) & = & 2 \\ v'(x) & = & e^{-x} & & v(x) & = & -e^{-x} \end{array}$$

Nous concluons que

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2x)e^{-x}\,dx = \frac{-3}{e}-e+2e-\frac{2}{e}-[2xe^{-x}]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}2e^{-x}\,dx = e-\frac{9}{e}$$

2. Effectuons le changement de variable $y=e^x$ et donc $dy=e^x\,dx=y\,dx$, on obtient

$$\int_1^2 \frac{dx}{1-e^x} = \int_{x=1}^{x=2}\frac{dy}{y(1-y)}.$$

$x \mapsto e^x$ est un homéomorphisme de $[1;2]$ dans $[e;e^2]$ de plus pour tout $y>1$ on a $\frac{1}{y(1-y)}=\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}$ et donc

$$= \int_{y=e}^{y=e^2}(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y})\,dy = [\ln y-\ln|1-y|]_e^{e^2} = 1-\ln(1+e).$$

Exercice III. Calculer en précisant le domaine de validité $\int \arcsin x\,dx$

La fonction $x\mapsto \arcsin x$ est définie et continue sur l'intervalle $[-1;1]$ et est à valeurs dans $[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. On cherche donc des primitives sur cette intervalle. Posons $x=\sin\theta$ alors $dx=\cos\theta\,d\theta$. Pour tout $\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin\sin\theta=\theta$. On cherche donc les primitives :

$$\int \theta\cos\theta\,d\theta = \theta\sin\theta-\int\sin\theta = \theta\sin\theta+\cos\theta$$

De plus, pour tout $\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\cos\theta\geq 0$ et donc $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$. On obtient finalement

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}.$$

Les primitives de $x\mapsto\arcsin x$ sur l'intervalle $[-1;1]$ sont les fonctions $x\mapsto x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$ où C est une constante réelle.

Exercice IV. On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\cos(\ln(x^2)) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$ puisqu'elle est le produit de composées de fonctions continues.
Nous constatons que $\forall x \neq 0$, $-1 \leq \cos(\ln(x^2)) \leq 1$ et comme x tend vers 0 en 0,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Ce qui prouve que f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

2. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Intégrons par parties sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \cos(\ln(x^2)) & u'(x) & = & \frac{-2}{x}\sin(\ln(x^2)) \\ v'(x) & = & x & v(x) & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Nous obtenons

$$\int x\cos(\ln(x^2))\,dx = \frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2)) + \int x\sin(\ln(x^2))\,dx.$$

Intégrons de nouveau par parties sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \sin(\ln(x^2)) & u'(x) & = & \frac{2}{x}\cos(\ln(x^2)) \\ v'(x) & = & x & v(x) & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Nous obtenons

$$\int x\cos(\ln(x^2))\,dx = \frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2)) + \frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \int x\cos(\ln(x^2))\,dx.$$

De cette égalité nous tirons une primitive de f sur $]0,+\infty[$:

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2)) + \frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2))).$$

Le calcul ci-dessus est aussi valide sur $]-\infty;0[$ et en recollant en 0 pour obtenir une fonction continue, nous obtenons que la fonction

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2}{4}(\sin(\ln(x^2)) + \cos(\ln(x^2))) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est une primitive de f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$. En 0 nous constatons que le taux d'accroissement de F :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{x}{4}(\sin(\ln(x^2)) + \cos(\ln(x^2))) \to_{x\to 0} 0$$

et donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$, ce qui nous permet de conclure que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. (Cours, 6 points) Montrer que si une fonction f est continue sur un intervalle $[a;b]$ alors elle admet une primitive sur cet intervalle.

Exercice II. Calculer **1.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx$ **2.** $\int_0^4 3^{\sqrt{2t+1}} \, dt$.

Intégrons par partie

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x^2 & u'(x) & = & 2x \\ v'(x) & = & \sin x & v(x) & = & -\cos x \end{array}$$

Nous avons donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = [-x^2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x \, dx.$$

Intégrons par partie une nouvelle fois

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & 2x & u'(x) & = & 2 \\ v'(x) & = & \cos x & v(x) & = & \sin x \end{array}$$

Nous concluons que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx = [2x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \pi - 2$$

2. Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{2t+1}$ et donc $dx = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} dt$, et donc $dt = x \, dx$.

$$\int_0^4 3^{\sqrt{2t+1}} \, dt = \int_0^4 e^{(\ln 3)\sqrt{2t+1}} \, dt = \int_{t=0}^{t=4} x e^{(\ln 3)x} \, dx = \int_{x=1}^{x=3} x e^{(\ln 3)x} \, dx.$$

Intégrons maintenant par partie

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & x & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & e^{(\ln 3)x} & v(x) & = & \frac{e^{(\ln 3)x}}{\ln 3} \end{array}$$

On obtient

$$\int_0^4 3^{\sqrt{2t+1}} \, dt = [x\frac{e^{(\ln 3)x}}{\ln 3}]_1^3 - \int_1^3 \frac{e^{(\ln 3)x}}{\ln 3} \, dx = \frac{78}{\ln 3} - \frac{24}{\ln^2 3}$$

Exercice III. Calculer en précisant le domaine de validité $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1;1]$, nous cherchons donc des primitives sur cet intervalle. Effectuons le changement de variable $x = \sin\theta$ et donc $dx = \cos\theta\, d\theta$. Nous cherchons donc les primitives de

$$\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta.$$

Pour $x \in [-1;1]$ nous choisissons $\theta = \arcsin x$, donc $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et $\cos\theta \geq 0$ ce qui entraine que $\sqrt{1-\sin^2\theta}$. On se souvient en fin que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1)$. Nous pouvons donc calculer :

$$\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta = \int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{2}(\cos(2\theta)+1)\, d\theta = \frac{1}{4}\sin(2\theta)+\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\theta}{2}$$

Et enfin en revenant à x, une primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1;1]$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$.

Exercice IV. On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\sin(\ln(x^2)) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$ puisqu'elle est le produit de composées de fonctions continues.
Nous constatons que $\forall x \neq 0$, $-1 \leq \sin(\ln(x^2)) \leq 1$ et comme x tend vers 0 en 0,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Ce qui prouve que f est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

2. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Intégrons par parties sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \sin(\ln(x^2)) & u'(x) & = & \frac{2}{x}\cos(\ln(x^2)) \\ v'(x) & = & x & v(x) & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Nous obtenons

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \int x\cos(\ln(x^2))\,dx.$$

Intégrons de nouveau par parties sur $]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rclrcl} u(x) & = & \cos(\ln(x^2)) & u'(x) & = & \frac{-2}{x}\sin(\ln(x^2)) \\ v'(x) & = & x & v(x) & = & \frac{x^2}{2} \end{array}$$

Nous obtenons

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2)) - \int x\sin(\ln(x^2))\,dx.$$

De cette égalité nous tirons une primitive de f sur $]0,+\infty[$:

$$\int x\sin(\ln(x^2))\,dx = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2}\sin(\ln(x^2)) - \frac{x^2}{2}\cos(\ln(x^2))).$$

Le calcul ci-dessus est aussi valide sur $]-\infty;0[$ et en recollant en 0 pour obtenir une fonction continue, nous obtenons que la fonction

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{4}(\sin(\ln(x^2)) - \cos(\ln(x^2))) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

est une primitive de f sur $]-\infty;0[$ et sur $]0,+\infty[$. En 0 nous constatons que le taux d'accroissement de F :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \frac{x}{4}(\sin(\ln(x^2)) - \cos(\ln(x^2))) \to_{x\to 0} 0$$

et donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$, ce qui nous permet de conclure que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.