Exercice I. Théorème de Darboux

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée. Soit $a, b \in I$. On suppose pour simplifier que $a < b$ et que $f'(a) < f'(b)$. Soit $\xi \in [f'(a)\,;\, f'(b)]$. On se propose de montrer que la valeur intermédiaire ξ est atteinte par la dérivée f'.

1. Montrer que $\xi \in [f'(a)\,;\frac{f(b)-f(a)}{b-a}] \cup [\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,; f'(b)]$. On suppose désormais pour simplifier que $f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et que $\xi \in]f'(a)\,;\frac{f(b)-f(a)}{b-a}]$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est continue sur $]a; b]$. En déduire qu'il existe $c \in]a; b]$ tel que $\xi = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

3. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.

4. Conclure que la fonction f' a la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice II. Soit f et g deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle $[a; b]$. Montrer que fg est intégrable au sens de Riemann sur $[a; b]$ (on pourra supposer dans un premier temps que f et g sont positives).

Exercice III. Sommes de Riemann : calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1}$ **2.** $v_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+\frac{k}{n})^{\frac{1}{n}}$ **3.** $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\frac{k\pi}{n}$

4. $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} \sin\frac{k}{n^2}$ (on pourra montrer que $w_n - t_n$ tend vers 0).

Exercice IV. On considère la fonction caractéristique des nombres rationnels :

$$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \chi(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ \chi(x) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que χ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que χ n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice V. On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \chi(x) = \frac{1}{q} \text{ si } x \in \mathbb{Q} \text{ et } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ \chi(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Montrer que f est discontinue en tout point $x \in \mathbb{Q}$.

3. Montrer que f est intégrables au sens de Riemann et que $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2009/integration/`