Exercice I. On considère la formule de calcul approché de l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 f(t)\,dt = af(x_1) + bf(x_2)$$

Quelles relations doivent satisfaire, a, b, x_1 et x_2 pour que la formule soit exacte pour

1. les fonctions constantes,

2. les fonctions affines,

3. les fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.

Exercice II. On veut donner une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

1. En prenant $n = 4$, donner les valeurs obtenues par les méthodes des rectangles, des trapèzes et de SIMPSON.

2. Donner une majoration de l'erreur pour les méthodes des rectangles et des trapèzes.

Exercice III. On considère l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions continues sur $[0;1]$. Pour f et g dans $\mathcal{E}$ on définit $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)t^2\,dt$. Montrer que $(f|g)$ est un produit scalaire.

Exercice IV. En utilisant la norme L^2 pour les fonctions continues définies sur $[0;1]$ donner la meilleur approximation linéaire de la fonction exponentielle.

Exercice V. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Donner la fonction dérivée des fonctions définies par :

1. $\displaystyle g(x) = \int_2^{x(x-1)} f(t)\,dt$, **2.** $\displaystyle \psi(x) = \int_x^{2x+1} f(t)\,dt$, **3.** $\displaystyle h(x) = \int_0^1 \sin(x^2t^3)\,dt$,

4. $\displaystyle u(x) = \int_0^4 3^{\sqrt{2xt^2+1}}\,dt$, **5.** $\displaystyle v(x) = \int_1^7 e^{xt\ln t}\,dt$, **6.** $\displaystyle \phi(x) = \int_x^2 \frac{dt}{\ln(xt)}$

Exercice VI. Calculer

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)}$ **2.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x-3}$ **3.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+x+1}$ **5.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin 2x}$ **6.** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x - \cos x + 2}$

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2009/integration/`