19 mai 2009 13h30-15h **MA 206**
Université Paul Cézanne **Algèbre linéaire appliquée**

Examen final

Les exercices de ce partiel sont indépendants les uns des autres. Leur ordre est indépendant de leur difficulté. La calculatrice est interdite. Les documents de cours sont interdits.

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes suivants :

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+3y &=& 1 \\ x+y &=& 7 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z &=& 1 \\ 2x+3y+z &=& 5 \\ -x+y-z &=& -3 \end{array}\right.$

2. Soit m un paramètre réel. Résoudre en fonction de m le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y &=& 1 \\ x+(m-2)y+mz &=& 2 \\ 2x-2y+mz &=& 3 \end{array}\right.$$

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice A.
2. Soit a, b et c trois paramètres réels. On considère le système d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+5y-3z &=& 3a \\ -x-4y+3z &=& 3b \\ 2x+2y-3z &=& 3c \end{array}\right.$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $MX = C$, en précisant les valeurs de M, X et C.
b) Calculer le produit de matrices AM.
c) Exprimer a, b et c en fonctions de x, y et z.

Exercice 3. On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries dans un étang. Les bactéries sont très nombreuses dans la forêt qui entoure l'étang et le contaminent avec un flux constant. Mais une fois arrivées dans l'étang, les bactéries ont un taux de mortalité très important. Si $y(t)$ représente le nombre de bactéries dans l'étang au temps t avec t en années, y vérifie l'équation

$$y' - dy = a$$

où d et a sont des constantes à déterminer.

1. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle ci-dessus *(on cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction constante).*
2. On suppose que l'épidémie a commencé à un certain temps $t = 0$ c'est à dire que $y(0) = 0$, et on mesure le nombre de bactéries dans l'étang après 1 an, on a $y(1) = 300$. Exprimer $y(t)$ en fonction de d.
3. A l'aide d'autres relevés, on mesure $d = 0,1$. Combien de bactéries auront contaminé l'étang au bout de 10 ans ? On donnera la solution sous la forme la plus simple, mais on ne cherchera pas à calculer les exponentielles.

Corrigé de l'examen final

Correction 1. 1. a) $\boxed{\text{2 points}}$ $x = 20$, $y = -13$ b) $\boxed{\text{2 points}}$ $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$
2. $\boxed{\text{3 points}}$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & & & = & 1 \\ x & + & (m-2)y & + & mz & = & 2 \\ 2x & - & 2y & + & mz & = & 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & 2y & & & = & 1 & \\ & & my & + & mz & = & 1 & (L2-L1) \\ & & 2y & + & mz & = & 1 & (L3-2L1) \end{array}\right.$$

Si $m = 0$ la deuxième ligne devient $0 = 1$ et le système n'a pas de solutions.
Au contraire si $m \neq 0$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & - & 2y & & & = & 1 & \\ & & y & + & z & = & \frac{1}{m} & (\frac{1}{m}L2) \\ & & & & (m-2)z & = & 1-\frac{2}{m} & (L3-\frac{2}{m}L2) \end{array}\right.$$

Si $m = 2$ la dernière ligne devient $0 = 0$ et le système a une infinité de solution : $x = 1 + 2y$, $y = \frac{1}{2} - z$ et $z \in \mathbb{R}$.
Si $m \neq 0$ et $m \neq 2$ alors le système a une unique solution :

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 0 \\ z & = & \frac{1}{m} \end{array}\right.$$

Correction 2. 1. $\boxed{\text{3 points}}$ Calculons le déterminant et l'inverse de la matrice A par la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{array}{ll|ll} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (L2) \\ (L1) \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (L2) \\ (L1) \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ (L2-2L1) \\ (L3-2L1) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ (L2-2L1) \\ (L3-2L1) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ (\frac{1}{3}L2) \\ (L3-\frac{2}{3}L2) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ (\frac{1}{3}L2) \\ (L3-\frac{2}{3}L2) \end{array} \end{array}$$

Le déterminant de A est donc 3. *(il y a deux $-$ qui viennent de l'échange des lignes L1 et L2 et du troisième coefficient diagonal, le* 3 *vient de la division par* 3 *de la deuxième ligne)*
On continue l'algorithme (en remontant) pour arriver à la matrice identité dans la colonne de gauche.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L1 - L3) \\ (L2 + L3) \\ (-L3) \end{matrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (L1 - L3) \\ (L2 + L3) \\ (-L3) \end{matrix} \right.$$

L'inverse de la matrice A est donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -1 \\ \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2. a) $\boxed{\text{1 point}}$ Sous forme matricielle le système s'écrit $MX = C$ où $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 3c \end{pmatrix}$.

b) $\boxed{\text{2 points}}$ En calculant on trouve $AM = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (ce qui n'est pas surprenant puisque $M = 3A^{-1}$ d'après les questions précédentes).

c) $\boxed{\text{2 points}}$ En utilisant la question précédente et en multipliant l'expression matricielle du système par la matrice A à gauche, nous obtenons :

$$AMX = AC \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 3c \end{pmatrix}$$

et enfin en divisant par 3

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3b + c \\ a - c \\ 2a + 2b - c \end{pmatrix}$$

Nous obtenons donc x, y et z en fonctions de a, b et c :

$$\begin{cases} x = 2a + 3b + c \\ y = a - c \\ z = 2a + 2b - c \end{cases}$$

Correction 3. $\boxed{\text{3 points}}$

Les solutions de l'équation homogène $z' - dz = 0$ sont $z(t) = Ke^{dt}$ et comme les coefficients sont constants, on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante, on trouve $-a/d$. On obtient donc $y(t) = -\dfrac{a}{d} + Ke^{dt}$.

2. $\boxed{\text{2 points}}$ On obtient le système

$$\begin{cases} -\frac{a}{d} + K = 0 \\ -\frac{a}{d} + Ke^{d} = 300 \end{cases}$$

où les inconnues sont K et a et où d est un paramètre.
Avec la première équation, on a $K = \frac{a}{d}$ et en injectant dans la deuxième équation, on obtient $(e^d - 1)\frac{a}{d} = 300$. On a donc $a = \dfrac{300d}{e^d - 1}$ et $K = \frac{300}{e^d-1}$. On obtient donc finalement

$$y(t) = \frac{300}{e^d - 1}(e^{dt} - 1).$$

3. $\boxed{\text{1 point}}$ $y(10) = \dfrac{300}{e^{0,1} - 1}(e - 1)$