Partiel du 20/03/09

Les exercices de ce partiel sont indépendants les uns des autres. Leur ordre est indépendant de leur difficulté. La calculatrice est interdite. Les documents de cours sont interdits.

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y = -3 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 4 \\ x + 2y - 3z = -7 \end{cases}$

2. Donner les solutions du système suivant en fonction de a et $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ x + 2ay + z = 4 \\ x + y + bz = 3 \end{cases}$$

Exercice 2. On veut connaître le nombre de macrophages et de neutrophiles dans un échantillon de tissu. On note x le nombre de macrophages et y le nombre de neutrophiles dans cet échantillon. Par un marquage fluorescent et un comptage, on sait qu'il y a 50 cellules (macrophages + neutrophiles). On extrait ensuite ces cellules et on en mesure le poids : $2,1.10^4\mu$g. Un macrophage pèse 900μg et un neutrophile pèse 100μg.
Donner le système à résoudre pour trouver x et y, puis le résoudre.

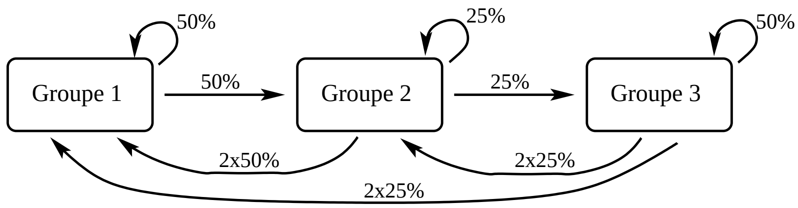
Exercice 3. 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5/2 & 5 \\ 0 & 5/2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

2. Soit $B = 25 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3/2 & 7/4 & 5/2 \\ 1/2 & 3/4 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX.

3. On s'intéresse maintenant à la croissance d'un échantillon de tissu. On classe les cellules qui composent ce tissu en 3 groupes en fonction de leur taille :
   Groupe 1 : cellules dont la taille appartient à $[0,\ 10^3\mu\text{m}^3[$.
   Groupe 2 : cellules dont la taille appartient à $[10^3\mu\text{m}^3,\ 8.10^3\mu\text{m}^3[$.
   Groupe 3 : cellules dont la taille appartient à $[8.10^3\mu\text{m}^3,\ 27.10^3\mu\text{m}^3[$.
   On cherche à connaitre le nombre de cellules de chaque groupe au cours du temps.On note x_n le nombre de cellules du groupe 1 le jour n, y_n le nombre de cellules du groupe 2 le jour n et z_n le nombre de cellules du groupe 3 le jour n.
   Au jour $n+1$:
   - 50% des cellules qui étaient dans le groupe 1 au jour n ont grossi et sont passées dans le groupe 2,
   - 50% des cellules qui étaient dans le groupe 1 au jour n n'ont pas changé et sont restées dans le groupe 1,

- 25% des cellules qui étaient dans le groupe 2 au jour n ont grossi est sont passées dans le groupe 3,
- 25% des cellules qui étaient dans le groupe 2 au jour n n'ont pas changé et sont restées dans le groupe 2,
- 50% des cellules qui étaient dans le groupe 2 au jour n se sont divisées et ont donné chacune 2 cellules du groupe 1,
- 50% des cellules qui étaient dans le groupe 3 au jour n n'ont pas changé et sont restées dans le groupe 3,
- 25% des cellules qui étaient dans le groupe 3 au jour n se sont divisées et ont donné chacune 2 cellules du groupe 2,
- 25% des cellules qui étaient dans le groupe 3 au jour n se sont divisées et ont donné chacune 2 cellules du groupe 1.

On résume ces informations sur le schéma suivant :



a) Exprimer x_{n+1}, y_{n+1} et z_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

b) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Montrer qu'on peut écrire $X_{n+1} = AX_n$ avec $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner la matrice A.

c) Au jour 0, on a $x_0 = 200$, $y_0 = 200$ et $z_0 = 100$. Donner x_2, y_2 et z_2.

Exercice 4. Calculer le déterminant des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Correction du partiel du 20/03/09

Correction 1. 1. a) Avec $(L2)$, on a $y = 3x - 5$ et on substitue cette formule dans $(L1)$ ce qui donne $x = 1$ puis $y = -2$.

b) $\left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y+ & z = & 2 & (L1) \\ x- & y+ & z = & 4 & (L2) \\ x+ & 2y- & 3z = & -7 & (L3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & y+ & z = & 2 & (L1) \\ - & 2y & = & 2 & (L2) \leftarrow (L2) - (L1) \\ & y- & 4z = & -9 & (L3) \leftarrow (L3) - (L1) \end{array}\right.$

Avec $(L2)$, on a $y = -1$. En injectant cette valeur dans $(L3)$, on obtient $z = 2$ et enfin avec $(L1)$, on obtient $x = 1$.

2. $\left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & ay+ & z = & 3 & (L1) \\ x+ & 2ay+ & z = & 4 & (L2) \\ x+ & y+ & bz = & 3 & (L3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & ay+ & z = & 3 & (L1) \\ & ay & = & 1 & (L2) \leftarrow (L2) - (L1) \\ & (1-a)y+ & (b-1)z = & 0 & (L3) \leftarrow (L3) - (L1) \end{array}\right.$

Donc si $a = 0$, $(L2)$ n'est jamais vérifiée et il n'y a pas de solution.
Si $a \neq 0$, $(L2)$ donne $y = \frac{1}{a}$ et en injectant dans $(L3)$, on obtient $(b-1)z = \frac{a-1}{a}$. Si $b \neq 1$, on a $z = \frac{a-1}{a(b-1)}$ et en injectant dans $(L1)$, on obtient $x = 3 - a\frac{1}{a} - \frac{a-1}{a(b-1)} = 2 - \frac{a-1}{a(b-1)}$.
Si $b = 1$ et si $a \neq 1$, alors il n'y a pas de solution d'après $(L3)$.
Si $b = 1$ et $a = 1$, $(L3)$ devient $0 = 0$ donc $z = \lambda \in \mathbb{R}$ et d'après $(L1)$, $x = 3 - a\frac{1}{a} - \lambda = 2 - \lambda$.
En résumé :
- Si $a = 0$ ou si $b = 1$ et $a \neq 1$, le système n'a pas de solution.
- Si $(a, b) \neq (0, 1)$, le système admet une unique solution : $x = 2 - \frac{a-1}{a(b-1)}$, $y = \frac{1}{a}$ et $z = \frac{a-1}{a(b-1)}$.
- Si $b = 1$ et $a = 1$, le système admet une infinité de solutions : $x = 2 - \lambda$, $y = \frac{1}{a}$ et $z = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Correction 2. D'après l'énoncé, x et y sont solutions du système

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 900x + 100y = 2,1.10^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 50 \\ 9x + y = 210 \end{cases}$$

$(L1)$ donne $y = 50 - x$ donc en remplaçant dans $(L2)$, on obtient $8x = 160$. Donc $x = 20$ et avec $(L1)$, on obtient $y = 30$.

Correction 3. 1. En posant la multiplication de matrices, on trouve $A^2 = B$, la matrice de la deuxième question !

2. On trouve $BX = \begin{pmatrix} 275 \\ 225 \\ 100 \end{pmatrix}$.

3. a) D'après l'énoncé, on a $\begin{cases} x_{n+1} = 0,5.x_n + 2 \times 0,5.y_n + 2 \times 0,25.z_n \\ y_{n+1} = 0,5.x_n + 0,25.y_n + 2 \times 0,25.z_n \\ z_{n+1} = 0,25.y_n + 0,5.z_n \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = 0,5.x_n + y_n + 0,5.z_n \\ y_{n+1} = 0,5.x_n + 0,25.y_n + 0,5.z_n \\ z_{n+1} = 0,25.y_n + 0,5.z_n \end{cases}$$

b) On a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$. A un facteur $0,1$ près, on retrouve la matrice A de la première question.

c) On a $X_2 = AX_1 = A(AX_0) = A^2X_0$. D'après les questions précédentes, on a $x_2 = 275$, $y_2 = 225$ et $z_2 = 100$.

Correction 4. Pour calculer le déterminant de A, on peut utiliser la règle de Sarrus ou bien mettre la matrice sous forme diagonale :

$$\begin{array}{rrrl} 1 & -1 & 1 & (L1) \\ -1 & 1 & 1 & (L2) \\ 1 & 1 & -1 & (L3) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} 1 & -1 & 1 & (L1) \\ 0 & 0 & 2 & (L2) \leftarrow (L2) + (L1) \\ 0 & 2 & -2 & (L3) \leftarrow (L3) - (L1) \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrl} 1 & -1 & 1 & (L1) \\ 0 & 2 & -2 & (L2) \leftrightarrow (L3) \\ 0 & 0 & 2 & (L3) \leftrightarrow (L2) \end{array}.$$

On a fait 1 échange de lignes donc $\det(A) = (-1) \times 1 \times 2 \times 2 = -4$.

Pour le déterminant de B, on utilise la formule $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ et on trouve $\det(B) = -19$.