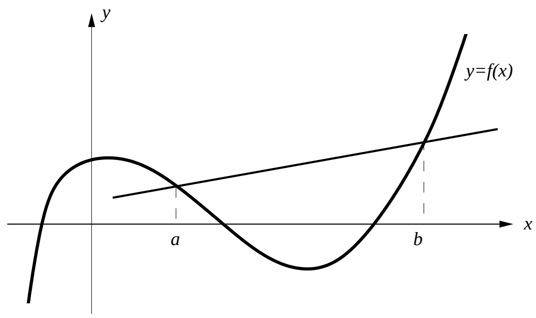
Systèmes d'équations différentielles linéaires

1 Exemples d'équations différentielles en biologie

1.1 Rappels sur la dérivée

Définition 1.1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Pour a et $b \in \mathbb{R}$, on définit l'accroissement de f entre a et b par $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

L'accroissement de f entre a et b correspond donc à la pente de la droite qui passe par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, c'est à dire la droite qui coupe la courbe de f en a et en b.

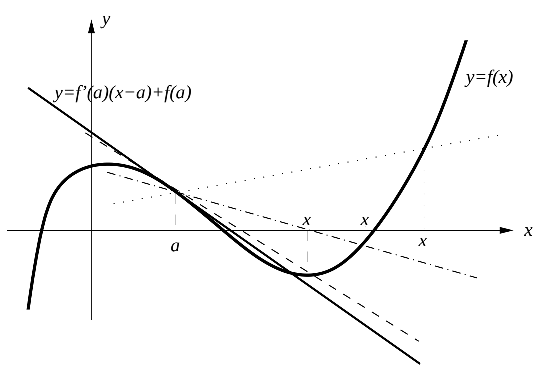


On remarque que si l'accroissement de f entre a et b est positif, alors f a augmenté entre a et b : $f(b) \geq f(a)$. Si l'accroissement est négatif, f a diminué entre a et b : $f(b) \leq f(a)$.
Une fonction croissante aura donc toujours des accroissements positifs et une fonction décroissante aura toujours des accroissements négatifs.

Définition 1.2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On définit la dérivée de f en a par $f'(a) = \lim\limits_{x \to a,\, x \neq a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Remarque: Si la limite n'existe pas, on dit que f n'est pas dérivable.

La dérivée représente donc l'accroissement instantané de la fonction f. On parle aussi de variation instantanée de la fonction f.
Plus précisément, la dérivée de f en a représente la pente de la droite tangente en a.



Proposition 1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*
f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$.
f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$.
f est constante si et seulement si $f' = 0$.

Définition 1.4. Soient $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
On dit que F est une primitive de f si $F' = f$.

Remarque: Il existe toujours une infinité de primitives pour une fonction f donnée car si F est une primitive, $F + c$ est aussi une primitive si c est une constante dans $\mathbb{R}$.
En revanche, il existe une unique primitive de f qui s'annulle en a, c'est la fonction $F + c$ avec $c = -F(a)$.

1.2 Croissance d'une population

On s'intéresse au devenir d'une population de levures. On suppose qu'il y a un très grand nombre de cellules. Au cours du temps, une certaine proportion de cellules de levures se divisent pendant qu'une autre partie des cellules meurt faisant varier le nombre total de cellules.
Soit $n(t)$ le nombre total de levures au temps t. On obtient donc une équation

$$n'(t) = bn(t) - dn(t)$$

où b est la proportion de cellules qui se multiplient (b pour "birth") et d est la proportion de cellules qui meurent (d pour "death"). On peut récrire l'équation sous la forme

$$n'(t) = kn(t)$$

où k est appelé coefficient d'accroissement de la population. k peut être positif ou négatif.
On peut résoudre cette équation et si on a n_0 cellules de levures au temps 0, on aura alors $n(t) = n_0 e^{kt}$.
On connait alors l'avenir de cette population de levures. Si k est négatif, la population de cellules décroît et tend vers 0. Si k est positif, la population croît indéfiniment.
Remarques:

- Normalement, un nombre de cellules devrait être un entier, mais ici, on a supposé qu'il y a un très grand nombre de cellules et les chiffres après la virgules sont donc négligeables. Le véritable nombre de cellules est donc l'entier le plus proche.
- En réalité, cette équation n'est pas tout à fait réaliste si $k > 0$. Le nombre de levures ne peut pas augmenté indéfiniment car leurs ressources énergétiques (ou alimentaires) sont limitées. Il y a donc une population maximale possible et plus on approche de ce nombre de cellules, plus les cellules ont du mal à trouver des ressources donc meurent davantage. On obtient donc

  $$n'(t) = kn(t)(M - n(t))$$

  où M est le nombre maximal possible de levures. Cette équation est plus compliquée à résoudre, on trouve $n(t) = \dfrac{n_0 M e^{kMt}}{M + n_0(e^{kMt} - 1)}$. Le nombre de levures tend alors vers M quand t tend vers l'infini.

1.3 Un problème de cinétique chimique

Dans cette partie, on s'intéresse à la vitesse de formation d'une roche. Pour obtenir cette roche, deux réactions chimiques sont nécessaires :

$$A \to B \to C.$$

Ces réactions chimiques ne sont pas instantannées. La vitesse de la réaction $A \to B$ est proportionnelle à la concentration en A avec un coefficient de proportionalité k_1 et la vitesse de la réaction $B \to C$ est proportionnelle à la concentration en B avec un coefficient de proportionnalité k_2. On résume ces informations sur le schéma

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C.$$

On note $x(t)$ la concentration en A au temps t, $y(t)$ la concentration en B au temps t et $z(t)$ la concentration en C au temps t. On obtient les équations suivantes

$$\begin{cases} x'(t) = -k_1 x(t) \\ y'(t) = k_1 x(t) - k_2 y(t) \\ z'(t) = k_2 y(t) \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes connues.
Les solutions de ce système d'équations différentielles sont $x(t) = C_1 e^{-k_1 t}$, $y(t) = C_2 e^{-k_2 t} + C_1 \frac{k_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t}$ et $z(t) = C_3 - \frac{C_2}{k_2} e^{-k_2 t} - \frac{C_1}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t}$. Si on connait les concentrations en A, B et C aujourd'hui, on peut en déduire les concentrations en A, B et C au temps des dinosaures par exemple.

1.4 Contraction d'une fibre musculaire

Dans cette partie, on s'intéresse à la contraction d'une fibre musculaire. Une fibre musculaire isolée se comporte comme un ressort : la force de rappel qui s'exerce sur la fibre est inversement proportionnelle à la différence entre la longueur de la fibre et sa longueur au repos. On note $l(t)$ la longueur de la fibre au temps t. La relation fondamentale de la dynamique nous donne

$$l''(t) = -kl(t)$$

où k est le coefficient de raideur de la fibre. Si on étire la fibre jusqu'à une longuer l_0 et qu'on la lache au temps $t = 0$ sans donner d'impulsion, on a donc $l(0) = l_0$ et $l'(0) = 0$ donc on trouve $l(t) = l_0 \cos(\sqrt{k}t)$. Si la fibre se trouve dans un tissu musculaire, elle subit alors les frottements des autres cellules. Ces frottements exercent une force inversement proportionnelle à la vitesse de déformation de la fibre. L'équation devient alors

$$l'(t) = -al'(t) - kl(t)$$

où a est le coefficient de frottement. Les solutions de l'équations dépendent des valeurs de a et k comme nous le verrons dans la suite.

2 Equations différentielles

2.1 Définitions

Définition 2.1. – Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme

$$y' + a_1(t)y = b(t)$$

où l'inconnue y est une fonction de $t \in \mathbb{R}$.
– Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est une équation de la forme

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t)$$

où l'inconnue y est une fonction de $t \in \mathbb{R}$.
– Les a_j sont les coefficients de l'équation. Cela peut être des constantes ou bien des fonctions de t.
– b est le second membre de l'équation. Cela peut être une constante ou une fonction de t.
– Résoudre une équation différentielle, c'est donner <u>toutes</u> les fonctions qui vérifient l'équation.

Exemple 2.2. – $y' + 2ty = 3$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
– $y'' + 3y' - y = e^{2t^2}\cos(t)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Définition 2.3. – Un système d'équations différentielles linéaires (d'ordre 1) est un ensemble d'équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1' + a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n & = & b_1(t) \\ y_2' + a_{21}(t)y_1 + \ldots + a_{2n}(t)y_n & = & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' + a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n & = & b_n(t) \end{array}\right.$$

où y_1, y_2, $\ldots$, y_n représentent des fonctions de $t \in \mathbb{R}$.
– Les a_{ij} sont les coefficients du système.
– Les b_i sont les seconds membres du système.
– Une solution de ce système est un n-uplet de fonctions $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ qui vérifient

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_1'(t) + a_{11}(t)y_1(t) + \ldots + a_{1n}(t)y_n(t) & = & b_1(t) \\ y_2'(t) + a_{21}(t)y_1(t) + \ldots + a_{2n}(t)y_n(t) & = & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(t) + a_{n1}(t)y_1(t) + \ldots + a_{nn}(t)y_n(t) & = & b_n(t) \end{array}\right.$$

– Résoudre un système d'équations différentielles, c'est donner <u>toutes</u> les solutions du système.
– Le système d'équations différentielles linéaires ci-dessus s'écrit aussi

$$Y' + A(t)Y = B(t)$$

avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ le vecteur des fonctions inconnues, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$ la matrice des coefficients et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ le second membre.

Exemple 2.4. $\begin{cases} y' + y + 2z = t^2 \\ z' + 3y - z = -4t \end{cases}$ est un système linéaire de 2 équations différentielles. On l'écrit sous la forme $Y' + AY = B$ avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -4t \end{pmatrix}$.

Proposition 2.5. *Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 s'écrit sous la forme d'un système linéaire à 2 équations différentielles d'ordre 1 en posant $y_1 = y$ et $y_2 = y'$.*

Exemple 2.6. L'équation $y'' + 2y' - 3y = 2t$ peut s'écrire sous la forme du système

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = 0 \\ y_2' + 2y_2 - 3y_1 = 2t \end{cases}$$

où $y_1 = y$ et $y_2 = y'$.

Dans la partie suivante, on ne parlera que de systèmes linéaires d'équations différentielles d'ordre 1, mais les résultats seront donc aussi vrais pour une équation différentielle d'ordre 2.

2.2 Equations homogènes

Définition 2.7. On considère le système d'équations différentielles $(S) \quad Y' + A(t)Y = B(t)$.
- On dit que le système (S) est homogène si $B \equiv 0$.
- Le système homogène associé à (S) est le système $(H) \quad Y' + A(t)Y = 0$.

Exemple 2.8. Soit (E_1) $y' + 2ty = 3\cos(t)$. L'équation homogène associée est (H_1) $y' + 2ty = 0$.
Soit (E_2) $\begin{cases} y' + 2ty + z = 3\cos(t) \\ z' + y - t^2 z = 2 \end{cases}$. Le système homogène associé est (H_2) $\begin{cases} y' + 2ty + z = 0 \\ z' + y - t^2 z = 0 \end{cases}$.
Soit (E_3) $y'' + 3ty' + \sin(t)y = -3e^t$. L'équation homogène associée est (H_3) $y'' + 3ty' + \sin(t)y = 0$.

Proposition 2.9. – *Si Y et X sont des solutions du système (S), alors $Y - X$ est solution de système homogène associé (H).*
- *Si Y est une solution du système (S) et si Z est une solution du système homogène associé (H), alors $Y + Z$ est une solution du système (S).*

Démonstration:
- Y est solution de (S) donc $Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t)$ et X est aussi solution de (S) donc $X'(t) + A(t)X(t) = B(t)$. On a donc
$$(Y - X)'(t) + A(t)(Y - X)(t) = Y'(t) - X'(t) + A(t)Y(t) - A(t)X(t) = B(t) - B(t) = 0.$$
Donc $Y - X$ est solution de (H).
- Y est solution de (S) donc $Y'(t) + A(t)Y(t) = B(t)$ et Z est solution de (H) donc $Z'(t) + A(t)Z(t) = 0$. On a donc
$$(Y + Z)'(t) + A(t)(Y + Z)(t) = Y'(t) + Z'(t) + A(t)Y(t) + A(t)Z(t) = B(t) + 0 = B(t).$$
$Y + Z$ est donc solution de (S).

□

Théorème 2.11. *On obtient toutes les solutions du système (S) en ajoutant toutes les solutions du système (H) à une solution particulière de (S).*

3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

3.1 Equations homogènes

Théorème 3.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante. Les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-at}$ avec $K \in \mathbb{R}$. K représente la valeur de $y(t)$ en $t = 0$.*

Démonstration: Pour $K \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto Ke^{-at}$ est bien solution de l'équation. Il reste à vérifier que ce sont les seules solutions. Soit $y(t)$ une solution de l'équation, c'est à dire $y'(t) + ay(t) = 0$. On multiplie l'équation par e^{at} et on obtient $y'(t)e^{at} + ay(t)e^{at} = 0$, mais d'après les régles de dérivation d'un produit de fonctions, cette équation peut s'écrire $(ye^{at})'(t) = 0$ donc la fonction $t \mapsto y(t)e^{at}$ est constante, c'est à dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ constante tel que $y(t)e^{at} = K$ donc $y(t) = Ke^{-at}$. Ce sont donc bien les seules solutions. $\square$

Exemple 3.2. Les solutions de l'équation $y' = 2y$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$ une constante.

Théorème 3.3. *Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de cette foncion. Les solutions de l'équation $y' + \alpha(t)y = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-A(t)}$ avec $K \in \mathbb{R}$.*

Démonstration: La démonstration est identique à celle du théorème précédent. $\square$

Exemple 3.4. Les solutions de l'équation $y' + 2ty = 0$ sont les fonctions $t \mapsto Ke^{-t^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$ constante.

3.2 Solutions particulières

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, pour résoudre une équation différentielle, il suffit de savoir résoudre l'équation homogène associée et d'y ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre. Dans cette partie, on présente donc des méthodes pour pouvoir facilement trouver une solution de l'équation différentielle avec second membre.

Proposition 3.5. *Si les coefficients de l'équation et le second membre de l'équation sont constants, on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante.*

Exemple 3.6. Résoudre l'équation différentielle $y' + 3y = 6$.
L'équation homogène associée est $y' + 3y = 0$, les solutions sont donc de la forme $z(t) = Ke^{-3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$ une constante. On cherche maintenant une solution particulière $y_0(t)$ sous la forme d'une constante $y_0(t) = c \in \mathbb{R}$. On a alors $y_0'(t) = 0$ donc en injectant y_0 dans l'équation, on obtient $3c = 6$ d'où $c = 2$ convient.
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y(t) = 2 + Ke^{-3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$ une constante à déterminer.

Théorème 3.7 (Variation de la constante)**.** *On considère l'équation $(E) \quad y' + \alpha(t)y = b(t)$. L'équation homogène associée est $(H) \quad y' + \alpha(t)y = 0$. Les solutions de (H) sont les fonctions $z(t) = Ke^{-A(t)}$ où A est une primitive de α et K est une constante. On cherche alors une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y_0(t) = f(t)e^{-A(t)}$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à déterminer.*
En injectant y_0 dans l'équation, on obtient $f'(t)e^{-A(t)} = b(t)$, il faut donc prendre une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ pour f.

Exemple 3.8. Résoudre l'équation $(E) \quad y' + 2y = 3e^t$.
On commence par résoudre l'équation homogène associée $(H) \quad y + 2y = 0$. Les solutions sont $z(t) = Ke^{-2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$ une constante.
Pour trouver une solution particulière de (E), on fait varier la constante, c'est à dire qu'on cherche la solution particulière sous la forme $y_0(t) = f(t)e^{-2t}$ (on a remplacé la constante par une fonction "variable"). On a alors $y_0'(t) = f'(t)e^{-2t} - 2f(t)e^{-2t}$ donc en injectant cette fonction dans l'équation (E), on trouve

$$f'(t)e^{-2t} - 2f(t)e^{-2t} + 2f(t)e^{-2t} = 3e^t \quad \Leftrightarrow \quad f'(t)e^{-2t} = 3e^t \quad \Leftrightarrow \quad f'(t) = 3e^t e^{2t} = 3e^{3t}$$

Il reste à trouver une primitive de $3e^{3t}$, on peut prendre $f(t) = e^{3t}$ par exemple. On a donc $y_0(t) = f(t)e^{-2t} = e^{3t}e^{-2t} = e^t$ et les solutions de (E) sont donc les fonctions $y(t) = e^t + Ke^{-2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$ une constante.

4 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Dans cette partie, on s'intéresse aux systèmes d'équations différentielles du type

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n & = & b_1(t) \\ y_2' + a_{21}(t)y_1 + \ldots + a_{2n}(t)y_n & = & b_2(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n' + a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n & = & b_n(t) \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, on se contentera d'étudier les systèmes de deux équations différentielles, mais les méthodes présentées fonctionnent pour des systèmes de taille quelconque. On s'intéresse donc désormais au système

$$\begin{cases} y' + ay + bz = \alpha(t) \\ z' + cy + dz = \beta(t) \end{cases}$$

4.1 Systèmes diagonaux et triangulaires

Proposition 4.1. *Si la matrice du système $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonale, on a alors deux équations différentielles d'ordre 1 que l'on peut résoudre séparément.*

Exemple 4.2. Résoudre le système $\begin{cases} y' + 2y = 3e^t \\ z' + 2tz = 0 \end{cases}$.
D'après les calculs faits dans les exemples ci-dessus, on a

$$\begin{cases} y(t) = e^t + K_1 e^{-2t} \\ z(t) = K_2 e^{-t^2} \end{cases}$$

avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

Proposition 4.3. *Si la matrice du système est triangulaire, le système s'écrit alors*

$$\begin{cases} y' + ay + bz = \alpha(t) \\ z' + dz = \beta(t) \end{cases}$$

On résoud la dernière équation et on injecte le résultat dans la première équation que l'on peut alors résoudre.

Exemple 4.4. Résoudre $\begin{cases} y' + 2y + z = e^{2t} \\ z' - 3z = 0 \end{cases}$

On commence par résoudre la seconde équation, on a $z(t) = K_2 e^{3t}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}$. On injecte alors cette fonction dans la première équation et on obtient donc

$$y' + 2y = e^{2t} - K_2 e^{3t}$$

L'équation homogène associée est $y' + 2y = 0$ donc les solutions sont $w(t) = K_1 e^{-2t}$ et d'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $y_0(t) = f(t)e^{-2t}$. En remplaçant dans l'équation et en simplifiant, on trouve qu'il faut avoir

$$f'(t)e^{-2t} = e^{2t} - K_2 e^{3t}$$

c'est à dire que f doit être une primitive de $e^{4t} - K_2 e^{5t}$. On choisit $f(t) = \dfrac{e^{4t}}{4} - K_2 \dfrac{e^{5t}}{5}$ et les solutions du système sont donc

$$\begin{cases} y(t) = \dfrac{e^{2t}}{4} - K_2 \dfrac{e^{3t}}{5} + K_1 e^{-2t} \\ z(t) = K_2 e^{3t}. \end{cases}$$

4.2 Systèmes quelconques

Proposition 4.5. *Pour résoudre un système quelconque d'équations différentielles, il faut trouver un changement de variables $u(t) = \lambda y(t) + \mu z(t)$ et $v(t) = \nu y(t) + \rho z(t)$ qui permet de se ramener à un système diagonal ou triangulaire.*

Exemple 4.6. Résoudre le système $\begin{cases} y' + 3y - z = 0 \\ z' - y + 3z = 0 \end{cases}$.

On pose $u(t) = y(t) + z(t)$ et $v(t) = y(t) - z(t)$. On a alors

$$\begin{cases} u'(t) = y'(t) + z'(t) = -3y(t) + z(t) + y(t) - 3z(t) = -2(y(t) + z(t)) = -2u(t) \\ v'(t) = y'(t) - z'(t) = -3y(t) + z(t) - y(t) + 3z(t) = -4(y(t) - z(t)) = -4v(t) \end{cases}$$

On a donc $u(t) = K_1 e^{-2t}$ et $v(t) = K_2 e^{-4t}$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$. Mais on veut connaître y et z, il faut donc encore résoudre le système

$$\begin{cases} y(t) + z(t) = K_1 e^{-2t} \\ y(t) - z(t) = K_2 e^{-4t}. \end{cases}$$

On trouve ici $y(t) = \frac{1}{2}(K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-4t})$ et $z(t) = \frac{1}{2}(K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-4t})$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

5 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

5.1 Equations homogènes

Définition 5.1. Soit $(H) \quad ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants avec $a \neq 0$. On définit le polynôme caractéristique de l'équation $P(X) = aX^2 + bX + c$.

Théorème 5.2. *Soit* $(H)\quad ay'' + by' + cy = 0$ *une équation différentielle homogène du second ordre à coefficients constants avec* $a \neq 0$*. Soit* $P(X) = aX^2 + bX + c$ *son polynôme caractéristique.*

- *Si* $\Delta = b^2 - 4ac > 0$*,* P *a deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2*. Les solutions de l'équation sont alors les fonctions* $y(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$ *avec* K_1 *et* K_2 *des constantes dans* $\mathbb{R}$*.*
- *Si* $\Delta = b^2 - 4ac = 0$*,* P *a une unique racine réelle* $r = \frac{-b}{2a}$*. Les solutions de l'équation sont alors les fonctions* $y(t) = (K_1 t + K_2)e^{rt}$ *avec* K_1 *et* K_2 *des constantes dans* $\mathbb{R}$*.*
- *Si* $\Delta = b^2 - 4ac < 0$*,* P *a deux racines complexes conjuguées* $r_1 = \lambda + i\mu$ *et* $r_2 = \lambda - i\mu$*. Les solutions de l'équation sont alors les fonctions* $y(t) = (K_1 \cos(\mu t) + K_2 \sin(\mu t))\, e^{\lambda t}$*.*

Exemple 5.3. Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 3X + 2$. On a alors $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$ donc P a deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y = K_1 e^t + K_2 e^{2t}$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.4. Résoudre l'équation $y'' - 2y' + y = 0$.
Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 2X + 1$. On a alors $\Delta = 0$ donc P a une seule racine réelle $r = 1$ donc les solutions de l'équation différentielle sont $y(t) = (K_1 t + K_2)e^t$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.5. Résoudre l'équation $y'' + y = 0$.
Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 1$. On a alors $\Delta = -4$ donc P a deux racines complexes conjuguées $r_1 = i$ et $r_2 = -i$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $y(t) = K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t)$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.6. Résoudre l'équation $y'' + 2y' + 2y = 0$.
Le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 + 2X + 2$. On a alors $\Delta = -4$ donc P a deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions $y(t) = (K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t))\, e^{-t}$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

5.2 Solutions particulières

Proposition 5.7. *Soit l'équation différentielle* $(E)\quad ay'' + by' + cy = Q(t)e^{\alpha t}$ *où* Q *est une fonction polynôme et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *est une constante.*
Le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée est $P(X) = aX^2 + bX + c$*.*

- *Si* α *n'est pas racine de* P*, on cherche une solution particulière de cette équation sous la forme* $R(t)e^{\alpha t}$ *où* R *est un polynôme de même degré que* Q*.*
- *Si* α *est racine simple de* P*, on cherche une solution particulière de cette équation sous la forme* $tR(t)e^{\alpha t}$ *où* R *est un polynôme de même degré que* Q*.*
- *Si* α *est racine double de* P*, on cherche une solution particulière de cette équation sous la forme* $t^2 R(t)e^{\alpha t}$ *où* R *est un polynôme de même degré que* Q*.*

Remarque: Attention, il ne faut pas confondre P le polynôme caractéristique et Q, le polynôme du second membre.

Exemple 5.8. Résoudre l'équation $(E)\quad y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$.
L'équation homogène associée est $(H)\quad y'' - 3y' + 2y = 0$ et le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - 3X + 2$. On a vu dans les exemples précédents que les racines de P sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions $z(t) = K_1 e^t + K_2 e^{2t}$ avec K_1

et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.
On cherche maintenant une solution particulière de (E). Le second membre est de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q(t) = 1$ un polynôme constant (degré=0) et $\alpha = -1$. α n'est pas racine de P car $\alpha \neq r_1$ et $\alpha \neq r_2$ donc on cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $y_0(t) = Ce^{-t}$ où C est une constante (polynôme de degré 0). En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$Ce^{-t} + 3Ce^{-t} + 2Ce^{-t} = e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 6C = 1.$$

On prend donc $C = \frac{1}{6}$ et les solutions de l'équation sont donc les fonctions

$$y(t) = \frac{1}{6}e^{-t} + K_1e^t + K_2e^{2t}$$

avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.9. Résoudre l'équation $(E) \quad y'' - 3y' + 2y = te^{-t}$.
Comme ci-dessus, les solutions de l'équation homogène sont $z(t) = K_1e^t + K_2e^{2t}$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$. Le second membre est de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q(t) = t$ un polynôme de dégré 1 et $\alpha = -1$ n'est pas une racine du polynôme caractéristique. On cherche donc une solution particulière de (E) sous la forme $y_0(t) = (At + B)e^{-t}$. On a $y_0'(t) = (A - At - B)e^{-t}$ et $y_0''(t) = (-2A + At + B)e^{-t}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$(-2A+At+B)e^{-t}-3(A-At-B)e^{-t}+2(At+B)e^{-t} = te^{-t} \Leftrightarrow 6At+6B-5A = t \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 1 \\ 6B - 5A = 0 \end{cases}$$

On a donc $A = \frac{1}{6}$ et $B = \frac{5}{36}$. Les solutions de (E) sont donc

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}t + \frac{5}{36}\right)e^{-t} + K_1e^t + K_2e^{2t}$$

avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.

Exemple 5.10. Résoudre l'équation $(E) \quad y'' - 3y' + 2y = 2e^{2t}$.
A nouveau, les solutions de l'équation homogène sont $z(t) = K_1e^t + K_2e^{2t}$ avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$. Le second membre est de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec $Q(t) = 2$ un polynôme de dégré 0 et $\alpha = 2$. $\alpha = r_2$ est une racine du polynôme caractéristique, on cherche donc une solution particulière de l'équation sous la forme $y_0(t) = tCe^{2t}$. On a alors $y_0'(t) = (1 + 2t)Ce^{2t}$ et $y_0''(t) = (4 + 4t)Ce^{2t}$. En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$(4 + 4t)Ce^{2t} - 3(1 + 2t)Ce^{2t} + 2tCe^{2t} = 2e^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad C = 2.$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y(t) = 2te^{2t} + K_1e^t + K_2e^{2t}$$

avec K_1 et K_2 des constantes dans $\mathbb{R}$.