

Examen de rattrapage

Les exercices de ce partiel sont indépendants les uns des autres. Leur ordre est indépendant de leur difficulté. La calculatrice est interdite. Les documents de cours sont interdits.

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ 3x - 5y + 3z = -1 \\ x + 7y - 5z = -1 \end{cases}$$

2. Soit m un paramètre réel. Résoudre en fonction de m le système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + mz = 1 \\ -x + my + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant et l'inverse de la matrice A .

2. Soit a , b et c trois paramètres réels. On considère le système d'équation

$$\begin{cases} x + y - z = 2a \\ x - y - z = 2b \\ -2x + 4z = 2c \end{cases}$$

a) Écrire le système sous forme matricielle $MX = C$, en précisant les valeurs de M , X et C .

b) Calculer le produit de matrices AM .

c) Exprimer x , y et z en fonctions de a , b et c .

Exercice 3. On s'intéresse à l'évolution d'une population de bactéries dans un étang. Les bactéries sont très nombreuses dans la forêt qui entoure l'étang et le contaminent avec un flux constant. Mais une fois arrivées dans l'étang, les bactéries ont un taux de mortalité très important. Si $y(t)$ représente le nombre de bactéries dans l'étang au temps t avec t en années, y vérifie l'équation

$$y' - dy = a$$

où d et a sont des constantes à déterminer.

1. Donner toutes les solutions de l'équation différentielle ci-dessus (*on cherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction constante*).

2. On suppose que l'épidémie a commencé à un certain temps $t = 0$ c'est à dire que $y(0) = 0$, et on mesure le nombre de bactéries dans l'étang après 1 an, on a $y(1) = 300$. Exprimer $y(t)$ en fonction de d .

3. A l'aide d'autres relevés, on mesure $d = 0,1$. Combien de bactéries auront contaminé l'étang au bout de 10 ans ? On donnera la solution sous la forme la plus simple, mais on ne cherchera pas à calculer les exponentielles.

Corrigé de l'examen de rattrapage

- Correction 1.** 1. a) 2 points $x = 3, y = 5$ b) 2 points $x = 0, y = 2, z = 3$
2. 3 points VOIR LA CORRECTION DE L'EXAMEN

Correction 2. VOIR LA CORRECTION DE L'EXAMEN

Correction 3. 3 points

Les solutions de l'équation homogène $z' - dz = 0$ sont $z(t) = Ke^{dt}$ et comme les coefficients sont constants, on cherche une solution particulière sous la forme d'une constante, on trouve $-a/d$. On obtient donc $y(t) = -\frac{a}{d} + Ke^{dt}$.

2. 2 points On obtient le système

$$\begin{cases} -\frac{a}{d} + K = 0 \\ -\frac{a}{d} + Ke^d = 300 \end{cases}$$

où les inconnues sont K et a et où d est un paramètre.

Avec la première équation, on a $K = \frac{a}{d}$ et en injectant dans la deuxième équation, on obtient $(e^d - 1)\frac{a}{d} = 300$. On a donc $a = \frac{300d}{e^d - 1}$ et $K = \frac{300}{e^d - 1}$. On obtient donc finalement

$$y(t) = \frac{300}{e^d - 1}(e^{dt} - 1).$$

3. 1 point $y(10) = \frac{300}{e^{0,1} - 1}(e - 1)$