Equations différentielles linéaires

Exercice 1. Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes :

a) $y' + y = 0$ c) $2y' - 3y = 0$ e) $y' = (2t+3)y$

b) $y' = 4y$ d) $y' + ty = 0$ f) $2y' = \cos(t/2)y$

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $(E_a)\ y' - y = 6$ c) $(E_c)\ y' = 3y + 2e^{3t}$

b) $(E_b)\ y' + 2y = e^t$ d) $(E_d)\ y' + 2ty = 4t$

Exercice 3. On s'intéresse à une population de moustiques contaminés par une maladie sur une île proche des côtes d'un pays déjà contaminé fortement par cette maladie.
Le taux de reproduction des moustiques est lié à la saison et n'est donc pas constant au cours du temps. De plus, la proximité du pays contaminé par la maladie produit un flux faible de moustiques contaminés qui arrivent sur l'île. Ce flux dépend du nombre de moustiques dans le pays et dans l'île et donc des saisons.
Soit $n(t)$ le nombre de milliers de moustiques contaminés au temps t par la maladie, n est solution de l'équation

$$(E) \quad n' = r\big(1-\cos(2\pi t)\big)n + a\big(1-\cos(2\pi t)\big)$$

où r est le taux maximal de reproduction et a est le flux maximal de moustiques contaminés. r et a sont des paramètres constants à déterminer. L'unité de temps est l'année.

1. Au temps $t=0$, il n'y pas de moustique contaminé sur l'île. Donner $n(t)$ en fonction de r et a.
2. Au temps $t = 0,5$, on mesure le nombre de moustiques contaminés. On trouve $n = 8,59.10^{-2}$. Puis au temps $t=1$, on a $n = 0,319$ moustiques contaminés. En déduire r et a.
3. Combien de moustiques seront contaminés dans 3 ans, c'est à dire pour $t=3$?

Exercice 4. Résoudre les systèmes d'équations différentielles suivants :

a) $\begin{cases} y' - y = 2 \\ z' + tz = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' + y = 1 \\ z' - y + 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y' + y + 4z = 1 \\ z' + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ en posant $u(t) = y(t) - z(t)$ et $v(t) = y(t) + 2z(t)$.

Exercice 5. On s'intéresse à la concentration en une certaine protéine B dans une cellule. Pour produire cette protéine, une réaction chimique $A \xrightarrow{k} B$ est nécessaire et cette réaction n'est pas instantanée. Une fois produite, la protéine sort de la cellule à un taux proportionnel à sa concentration de coefficient de proportionnalité d. Soit $y(t)$ la concentration en A dans la cellule au temps t et $z(t)$ la concentration en B dans la cellule au temps t. On a alors le système

$$\begin{cases} y'(t) = -ky(t) \\ z'(t) = ky(t) - dz(t). \end{cases}$$

On connait $y(0) = 1$ et $z(0) = 2$ au temps 0. Calculer y et z pour tous temps t.

Exercice 6. Donner les solutions des équations suivantes :

a) $y'' + 3y' + 2y = 0$

b) $y'' + 4y' + 3y = 0$

c) $y'' + 2y' + y = 0$

d) $y'' + 4y' + 4y = 0$

e) $y'' + 3y = 0$

f) $y'' + y' + y = 0$

Exercice 7. Donner les solutions des équations suivantes :

a) $y'' + 3y' + 2y = e^t$

b) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t}$

c) $y'' + 2y' + y = e^t$

d) $y'' + 2y' + y = te^t$

e) $y'' + 2y' + y = te^{-t}$

f) $y'' + y' + y = e^t$

Exercice 8. On veut connaitre la température (supposée constante) au centre d'un volcan. Soit $T(x)$ la température au point de la cheminée situé à la hauteur x. T vérifie l'équation

$$T'' - \alpha T = 0.$$

On connait la tempérautre au bout de la cheminée : $T(10) = 1000$ et le coefficent $\alpha = 100$. Peut-on connaître $T(0)$?

Correction 1. On applique le théorème du cours

a) $y(t) = Ke^{-t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

b) $y(t) = Ke^{4t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

c) $y(t) = Ke^{\frac{3}{2}t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

d) $\frac{1}{2}t^2$ est une primitive de t donc $y(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

e) $t^2 + 3t$ est une primitive de de $2t + 3$, donc $y(t) = Ke^{t^2+3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

f) L'équation s'écrit $y' = \frac{1}{2}\cos(t/2)y$. $\sin(t/2)$ est une primitive de $\frac{1}{2}\cos(t/2)$ donc $y(t) = Ke^{\sin(t/2)}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Correction 2. a) (H_a) $y' - y = 0$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z(t) = Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme le coefficient et le second membre sont constants, on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction constante $y_0(t) = c \in \mathbb{R}$. En remplaçant dans l'équation on trouve $c = -6$. Les solutions de l'équation (E_a) sont donc les fonctions $y(t) = -6 + Ke^t$ avec $K \in \mathbb{R}$.

b) (H_b) $y' + 2y = 0$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z(t) = Ke^{-2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$. D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E_b) sous la forme $y_0(t) = f(t)e^{-2t}$. En remplaçant dans l'équation, on a $f'(t)e^{-2t} = e^t$ donc f est une primitive de e^{3t}. On choisit $f(t) = \frac{e^{3t}}{3}$. On a alors $y_0(t) = \frac{e^{3t}}{3}e^{-2t} = \frac{e^t}{3}$ et les solutions de (E_b) sont les fonctions $y(t) = \frac{e^t}{3} + Ke^{-2t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

c) (H_c) $y' - 3y = 0$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z(t) = Ke^{-3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$. D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E_c) sous la forme $y_0(t) = f(t)e^{3t}$. En remplaçant dans l'équation, on a $f'(t)e^{3t} = 2e^{3t}$ donc f est une primitive de 2. On choisit $f(t) = 2t$. On a alors $y_0(t) = 2te^{3t}$ et les solutions de (E_c) sont les fonctions $y(t) = 2te^{3t} + Ke^{3t} = (2t + K)e^{3t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

d) (H_d) $y' + 2ty = 0$ donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $z(t) = Ke^{-t^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$. D'après la méthode de variation de la constante, on cherche une solution particulière de (E_d) sous la forme $y_0(t) = f(t)e^{-t^2}$. En remplaçant dans l'équation, on a $f'(t)e^{-t^2} = 4t$ donc f est une primitive de $4te^{t^2}$. On choisit $f(t) = 2e^{t^2}$. On a alors $y_0(t) = 2$ et les solutions de (E_d) sont les fonctions $y(t) = 2 + Ke^{-t^2}$ avec $K \in \mathbb{R}$. On aurait aussi pu remarqué que 2 est une solution particulière dès le début !

Correction 3. 1. (H) $n' - r\big(1 - \cos(2\pi t)\big)n = 0$. $r\big(t - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)\big)$ est une primitive de $r\big(1 - \cos(2\pi t)\big)$ donc les solutions de l'équation homogène (H) sont $z(t) = Ke^{r(t-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t))}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

On cherche maintenant une solution particulière de (E). On constate que $n = -\frac{a}{r}$ convient. On a donc $n(t) = -\dfrac{a}{r} + Ke^{r(t-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t))}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Comme $n(0) = 0$, on a $n(t) = \dfrac{a}{r}(e^{r(t-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t))} - 1)$.

2. D'après la formule de la question 1., $n(0,5) = \dfrac{a}{r}(e^{r/2} - 1)$ et $n(1) = \dfrac{a}{r}(e^r - 1)$ donc $\dfrac{n(1)}{n(0,5)} = \dfrac{e^r - 1}{e^{r/2} - 1} = e^{r/2} + 1 = 0,319/8,59.10^{-2} \approx 3,71$. Avec une calculatrice, on trouve $r = 2$ à 10^{-2} près et on trouve alors $a = 0,1$.

3. $n(3) = \frac{a}{r}(e^{3r} - 1) = 20,12$, on aura donc environ 20 120 moustiques contaminés sur l'île.

Correction 4. a) On résoud chaque équation séparément. $y(t) = -2 + K_1e^t$ avec $K_1 \in \mathbb{R}$ et $z(t) = K_2e^{-t^2/2}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}$.

b) On résoud tout d'abord la première équation $y(t) = 1 + K_1e^{-t}$ avec $K_1 \in \mathbb{R}$ et on injecte cette valeur dan la deuxième équation. Il faut alors résoudre l'équation $z' + 2z = 1 + K_1e^{-t}$. Les solutions de l'équation homogène sont $w(t) = K_2e^{-2t}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $z_0(t) = f(t)e^{-2t}$, on a alors $f'(t)e^{-2t} = 1+K_1e^{-t} \Leftrightarrow f'(t) = e^{2t}+K_1e^t$. $f(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + K_1e^t$ convient. On obtient donc $z(t) = \frac{1}{2} + K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$ avec K_1 et $K_2 \in \mathbb{R}$.

c) On a $u'(t) = y'(t) - z'(t) = 1 - y(t) - 4z(t) + 2y(t) + 3z(t) = 1 + y(t) - z(t) = 1 + u(t)$ donc $u(t) = -1 + K_1e^t$. Puis $v'(t) = y'(t) + 2z'(t) = 1 - y(t) - 4z(t) + 2(-2y(t) - 3z(t)) = 1 - 5y(t) - 10z(t) = 1 - 5v(t)$. Donc $v(t) = \frac{1}{5} + K_2e^{-5t}$ avec $K_2 \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\begin{cases} y(t) - z(t) = -1 + K_1e^t \\ y(t) + 2z(t) = \frac{1}{5} + K_2e^{-5t} \end{cases}$$

D'où $z(t) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\left(K_2e^{-5t} - K_1e^t\right)$ et $y(t) = \frac{-3}{5} + \frac{1}{3}\left(K_2e^{-5t} + 2K_1e^t\right)$.

Correction 5. On a $y(t) = Ke^{-kt}$ et comme $y(0) = 1$, on a $y(t) = e^{-kt}$. Puis on injecte dans la deuxième équation et on obtient $z'(t) + dz(t) = ke^{-kt}$ donc les solutions de l'équation homogène sont $w(t) = Ke^{-dt}$ et on chercher une solution particulière sous la forme $z_0(t) = f(t)e^{-dt}$. Il faut donc $f'(t) = ke^{(d-k)t}$ donc $z_0(t) = \frac{dk}{d-k}e^{-kt}$ et comme $z(0) = 2$, $z(t) = \frac{dk}{d-k}e^{-kt} + (2 - \frac{dk}{d-k})e^{-dt}$.

Correction 6. On applique la méthode donnée en cours

a) Polynôme caractéristique : X^2+3X+2, $\Delta = 1$, $r_1 = -2$ et $r_2 = -1$ donc $y(t) = K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}$.

b) Polynôme caractéristique : $X^2 + 4X + 3$, $\Delta = 4 > 0$, $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$ donc $y(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-3t}$.

c) Polynôme caractéristique : $X^2 + 2X + 1$, $\Delta = 0$, $r = -1$ donc $y(t) = (K_1t + K_2)e^{-t}$.

d) Polynôme caractéristique : $X^2 + 4X + 4$, $\Delta = 0$, $r = -2$ donc $y(t) = (K_1t + K_2)e^{-2t}$.

e) Polynôme caractéristique : $X^2 + 3$, $\Delta = -12 < 0$, $r_1 = i\sqrt{3}$ et $r_2 = -i\sqrt{3}$ donc $y(t) = K_1\cos(\sqrt{3}t) + K_2\sin(\sqrt{3}t)$.

f) Polynôme caractéristique : X^2+X+1, $\Delta = -3 < 0$, $r_1 = -1/2+i\sqrt{3}/2$ et $r_2 = -1/2-i\sqrt{3}/2$ donc $y(t) = (K_1\cos(\sqrt{3}t/2) + K_2\sin(\sqrt{3}t/2))e^{-t/2}$.

Correction 7. a) Solution homogène : $z(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = Ae^t$ et on trouve $A = 1/6$.

b) Solution homogène : $z(t) = K_1e^{-t}+K_2e^{-2t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = tAe^t$ et on trouve $A = 1$.

c) Solution homogène : $z(t) = (K_1t + K_2)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = Ae^t$ et on trouve $A = 1/4$.

d) Solution homogène : $z(t) = (K_1t + K_2)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = (At + B)e^t$ et on trouve $A = 1/4$ et $B = -5/16$.

e) Solution homogène : $z(t) = (K_1t + K_2)e^{-t}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = t(At + B)e^t$ ...

f) Solution homogène : $z(t) = (K_1\cos(\sqrt{3}t/2) + K_2\sin(\sqrt{3}t/2))e^{-t/2}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y_0(t) = Ae^t$, on trouve $A = 1/3$.

Correction 8. $T(x) = K_1e^{-10x} + K_2e^{10x}$ et on a $K_1e^{-100} + K_2e^{100} = 1$ mais ça ne suffit pas pour déterminer K_1 et K_2. Il faudrait donc une seconde mesure pour pouvoir connaître $T(0)$.