Un devoir à la maison est avant tout un exercice de rédaction. Puisque vous en avez le temps vous devez apporter un grand soin à la présentation et à la rédaction.

On se propose dans ce devoir d'étudier la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Soit $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$, et $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ la suite des sommes partielles.

1. Rappeler la nature de la série harmonique.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer que $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

3. En déduire que pour tout entier N, $\ln(N+1) \leq S_N \leq 1 + \ln N$.

4. Montrer que $S_N \sim_{N\to+\infty} \ln N$.

On considère, pour $N \geq 1$, $V_N = S_N - \ln(N+1)$ et, pour $n \geq 1$, $v_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n})$.

5. Montrer que $(V_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des sommes partielles de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. Donner un équivalent de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

On appelle $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{N\to+\infty} V_N$ la **constante d'Euler**.

7. Montrer que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \varepsilon_1(N)$ où ε_1 est une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$.

On considère, pour $N \geq 1$, $W_N = \gamma - V_N$ et, pour $n \geq 1$, $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

8. Montrer que la série des $(w_n)_{n\geq 1}$ converge.

9. Calculer pour $N \geq 1$, $\sum_{n=N}^{+\infty} w_n$.

10. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq v_n \leq w_n$ *(Vous pourrez utiliser l'inégalité de la question 2.)*

11. En déduire que pour tout $N \geq 1$, $V_N \leq \gamma \leq V_N + \frac{1}{N+1}$.

12. Donner un encadrement de γ à 0.1 près.

13. Montrer que $v_n \sim_{n\to\infty} \frac{w_n}{2}$

14. Montrer que $W_N \sim_{N\to+\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} w_n$.

15. En déduire que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{N}\varepsilon_2(N)$ où ε_2 est une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$.