Université Aix-Marseille III
Faculté des sciences et techniques
Licence de mathématiques et informatique
2e année

Examen
lundi 11 janvier 2010
3h

Analyse 2 (MA301)
C. Choquet et T. Coulbois
Saint-Jérôme et Aix-Montperrin

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice I. Questions de cours.

1. Énoncer le critère de Cauchy de convergence d'une série numérique.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[a,b]$, convergeant simplement vers f sur $[a,b]$. Donner des conditions suffisantes sur la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que f soit dérivable sur $[a,b]$?

Exercice II. Intégrales généralisées. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{2/3}}$,

$x \mapsto \sin x$ est définie continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et strictement positive sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(\sin x)^{2/3}}$ est donc localement intégrable sur $]0; \frac{\pi}{2}]$. Elle est généralisée en 0. En 0, $\sin x \sim x$ et donc $\dfrac{1}{(\sin x)^{2/3}} \sim \dfrac{1}{x^{2/3}}$. L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$ est convergente et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{2/3}}$ converge.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$,

La fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u}$ est définie et continue sur $[1; +\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. Soit $A > 1$, en intégrant par partie nous obtenons

$$\int_1^A \frac{\sin u}{u}\, du = \sin 1 - \frac{\cos A}{A} - \int_1^A \frac{\cos u}{u^2}\, du$$

De plus pour tout $u > 1$, $|\dfrac{\cos u}{u^2}| \leq \dfrac{1}{u^2}$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{du}{u^2}$ converge. D'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2}\, du$ est absolument convergente et donc convergente. Enfin $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$ ce qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$ est convergente.

3. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}$ est définie et continue sur $]0; 2]$ donc localement intégrable sur cet intervalle. Effectuons un développement limité en 0 :

$$e^{-t} = 1 - t + t\epsilon(t) \quad \text{et} \quad \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} = t^{-1/2} - t^{-1/2}\epsilon(t) \quad \text{où} \quad \lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0.$$

On a donc l'équivalence en 0 : $\dfrac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} \sim t^{-1/2}$. L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^2 t^{-1/2}\, dt$ est convergente donc d'après le théorème de comparaison, $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}} dt$ est convergente.

Exercice III. Série numérique. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. On pose $v_n = nu_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. *(on pourra considérer* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$*)*

D'après le critère de Cauchy pour la série convergente $\sum_{n\geq 1} u_n$ pour tout $\epsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $N \leq p \leq q$, $|\sum_{k=p}^{k=q} u_k| \leq \frac{\epsilon}{2}$. En prenant $n > 2N$, $q = n$ et $p = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ on obtient $|\sum_{k=p}^{k=n} u_k| \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante nous en déduisons

$$0 \leq \frac{n}{2} u_n \leq \sum_{k=p}^{k=n} u_n \leq \sum_{k=p}^{k=n} u_k = |\sum_{k=p}^{k=n} u_k| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et donc

$$0 \leq n u_n \leq \epsilon.$$

Ce qui est exactement la définition de $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} (v_n - v_{n+1})$.

Pour $N > 0$, la somme partielle $\sum_{n=1}^{n=N} (v_n - v_{n+1}) = v_1 - v_{N+1}$. D'après la question précédente, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 1} (v_n - v_{n+1})$ converge vers $v_1 = u_1$.

3. En déduire que $\sum_{n\geq 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Pour $N > 0$, la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{n=N} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{n=N} (nu_n - (n+1)u_{n+1} + u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{n=N} (v_n - v_{n+1}) + \sum_{n=1}^{n=N} u_{n+1}.$$

Les deux séries convergent donc la série converge et

$$\sum_{n\geq 1} n(u_n - u_{n+1}) = u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

4. Application : calculer $\sum_{n\geq 1} nr^n$ pour $0 \leq r < 1$.

Pour $0 \leq r < 1$ la série géométrique de raison r est convergente et $\sum_{n\geq 0} r^n = \frac{1}{1-r}$. La suite de terme général $u_n = r^n$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après la question précédente

$$\sum_{n\geq 1} n(r^n - r^{n+1}) = \sum_{n\geq 1} r^n = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}.$$

En factorisant nous obtenons

$$\sum_{n\geq 1} n(r^n - r^{n+1}) = \sum_{n\geq 1} nr^n(1-r) = (1-r)\sum_{n\geq 1} nr^n$$

et donc $\sum_{n\geq 1} nr^n = \frac{r}{(1-r)^2}$.

Exercice IV. Limite et intégrale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Chercher la limite simple, f, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

Si $x = 0 \pmod{\pi}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0 \pmod{\pi}$ alors $-1 < \cos x < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction constante nulle.

2. Vérifier que :

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt.$$

D'après la question précédente $\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt = 0$. Alors que le calcul donne

$$\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = [-\frac{n}{n+1}(\cos x)^{n+1}]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt = 1$.

3. Que peut-on en conclure sur la convergence uniforme de (f_n) ?

Nous en déduisons que la suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $[0; \frac{\pi}{2}]$. En effet si la convergence était uniforme, l'intégrale de la limite serait égale à la limite des intégrales, ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

Exercice V. Limite et continuité. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un domaine D, et convergeant simplement vers une fonction f continue sur D. Soit (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers un élément x de D.

1. Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur D, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x).$$

D'après la définition de la covergence uniforme, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $t \in D$,

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En particulier pour $t = x_n$,

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme f est continue en x et que x_n tend vers x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ et donc il existe $N' \geq N$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi pour tout $n \geq N' \geq N$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

Prenons $f_n(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D = [0; 1]$. Posons $x_n = \frac{1}{2^{1/n}} = e^{-\frac{\ln 2}{n}}$. La suite numérique $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ converge vers $x = 1$ et pour tout entier n, $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f tel que $f(x) = 0$ pour $x \in [0; 1[$ et $f(1) = 1$. La convergence n'est pas uniforme et en effet

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \frac{1}{2} \neq f(x) = f(1) = 1.$$