Université Aix-Marseille III
Faculté des sciences et techniques
Licence de mathématiques et informatique
2e année

Examen
lundi 11 janvier 2010
3h

Analyse 2 (MA301)
C. Choquet et T. Coulbois
Saint-Jérôme et Aix-Montperrin

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Toute réponse doit être justifiée.

Exercice I. Questions de cours.

1. Énoncer le critère de Cauchy de convergence d'une série numérique.
2. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur $[a,b]$, convergeant simplement vers f sur $[a,b]$. Donner des conditions suffisantes sur la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que f soit dérivable sur $[a,b]$?

Exercice II. Intégrales généralisées. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(\sin x)^{2/3}}$, **2.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$, **3.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1-e^{-t}}{t^{3/2}}dt$.

Exercice III. Série numérique. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et décroissante telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. On pose $v_n = nu_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. *(on pourra considérer* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$*)*
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(v_n - v_{n+1})$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.
4. Application : calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nr^n$ pour $0 \leq r < 1$.

Exercice IV. Limite et intégrale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Chercher la limite simple, f, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que :
$$\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt.$$
3. Que peut-on en conclure sur la convergence uniforme de (f_n) ?

Exercice V. Limite et continuité. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un domaine D, et convergeant simplement vers une fonction f continue sur D. Soit (x_n) une suite d'éléments de D convergeant vers un élément x de D.

1. Si la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur D, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x).$$
2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.