Contrôle n^{0}2

Université Aix-Marseille III - Licence MI - Semestre 3 - Ma301 - 2009-2010

23 novembre 2009

Question de cours

Montrer que la série harmonique diverge en la comparant à l'intégrale généralisée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exercice

1. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $f_\beta : [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\beta(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^\beta}$ pour $t \geq 2$.
   - (a) Montrer que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, f_β est décroissante sur $[\max\{2, e^{-\beta}\}, +\infty[$.
   - (b) Pour $x \in [2, +\infty[$, calculer $\displaystyle\int_2^x f_\beta(t)dt$.
   - (c) Discuter, selon les valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$.
2. Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante de réels positifs.
   - (a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a
   $$\frac{1}{2}\, 2^{n+1} a_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k \leq 2^n a_{2^n}.$$
   Indication : on pourra remarquer que $2^{n+1} = 2^n + 2^n$.
   - (b) En déduire que les séries $\sum a_n$ et $\sum(2^n a_{2^n})$ sont de même nature.
   - (c) Utiliser le critère précédent pour retrouver les résultats de la question 1(c).

Aix-Marseille III – MA303 **Deuxième partiel** 23 novembre 2009

Ni calculatrices, ni documents. 1/2 heure

Question de cours (8 points). Qu'est-ce qu'une fonction intégrable au sens de Riemann ?

Exercice 1. Donner toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 3|2x - 3|$.

Exercice 2. Pour $a > 0$ calculer en précisant le domaine de validité $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.