Contrôle n^{0}3

Université Aix-Marseille III - Licence MI - Semestre 3 - Ma301 - 2009-2010

7 décembre 2009

Cours (6 points) Donner les définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme.

Exercice 1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ continue, positive et décroissante.

1. Pour un entier n, comparer $f(n)$ et $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ sont de même nature

Exercice 2

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$ et $v_n = (n+1)a^n$.

(1) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

(2) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente.

(3) Montrer que pour tout entier N,

$$(\sum_{n=0}^{N} u_n)^2 = \sum_{n=0}^{N} v_n + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=N+1-n}^{N} u_n u_k\right)$$

(On pourra, dans un premier temps le vérifier pour N=0,1,2)

(4) En déduire que pour tout entier N,

$$\left|\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)^2 - \sum_{n=0}^{N} v_n\right| \leq a^{N+1}\frac{N(N+1)}{2}$$

(5) Conclure que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a^n = \frac{1}{(1-a)^2}$.

Aix-Marseille III – MA303 **Troisième partiel** 7 décembre 2009

Ni calculatrices, ni documents. 1/2 heure

Question de cours (8 points). 1. Définir les sommes de Riemann.
2. Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice Soit a un réel. Calculer quand cela est possible

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2ax + 1}$$