

Exercice I. Étudier les intégrales suivantes et calculer

$$1. I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt,$$

$$2. J = \int_1^2 \ln(1+t^2) dt,$$

$$3. K = \int_1^e t^n \ln(t) dt,$$

$$4. L = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}.$$

Exercice II. Quelle est la nature des intégrales suivantes

$$1. I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \sqrt{t}}.$$

$$2. J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt.$$

$$3. K_\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}}) dt, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice III. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les intégrales existent

$$1. I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a(t-1)^b},$$

$$2. J = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b} dt.$$

Exercice IV. Montrer que les deux intégrales suivantes sont convergentes et calculer leur différence

$$1. I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} dt,$$

$$2. J = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt.$$

Exercice V. Fonction Gamma. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente. On note $\Gamma(n)$ sa valeur.

2. Trouver une relation entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$.

3. Calculer $\Gamma(0)$ et $\Gamma(1)$.

4. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice VI. Etudier la nature des intégrales suivantes

$$1. I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2t + 2} dt,$$

$$2. J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2 + 1} dt,$$

$$3. K = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt,$$

$$4. L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2 + 1} dt.$$

Exercice VII. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes

$$1. I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{1+t^2} dt. \quad 2. J = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(1-t)^3}} dt. \quad 3. K(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt, x > 0.$$

Exercice VIII. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose la fonction f bornée : il existe une constante M telle que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt$ existe pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt$.
3. Même question en supposant maintenant qu'il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall t \geq A, \quad |f(t)| \leq e^{\alpha t}.$$

Exercice IX. 1. Etudier la nature des intégrales dépendant du paramètre k , ($k \in \mathbb{N}$) données par

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t^2} dt$$

2. Calculer les I_k en mettant tout d'abord en évidence une relation de récurrence ($I_p = \frac{2}{p+1} I_{p+2}$). On donne $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice X. 1. Montrer que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^\alpha} dt$ sont absolument convergentes pour tout réel $\alpha > 1$.

2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha} dt$ diverge pour $0 < \alpha \leq 1$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente pour tout réel α tel que $0 < \alpha \leq 1$.
4. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$, $\alpha > 0$?
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t} dt$?

Exercice XI. Soient deux réels a et b tels que $0 < a < 1 < b$. En fonction des réels α et β , donner la nature des intégrales de BERTRAND définies comme suit

$$I = \int_b^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}, \quad J = \int_0^a \frac{dt}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}.$$

1. Premier cas : $\alpha > 1$, on écrit $\alpha = 1 + 2h$, avec $h > 0$.
2. Deuxième cas : $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
3. Troisième cas : $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$.
4. Quatrième cas : $\alpha < 1$, on écrit $\alpha = 1 - 2h$, avec $h > 0$.