Exercice I. Les séries suivantes convergent-elles? **1.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{3n}\right)$, **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n + \frac{1}{2n}\right)$.

Exercice II. Une série $\sum_{n \geq 1} a_n$ est dite **télescopique** si le terme général a_n peut s'écrire $a_n = b_{n+1} - b_n$ pour une certaine suite numérique $(b_n)_{n \geq 1}$.

1. Vérifier que $\sum_{n=1}^k a_n = b_{k+1} - b_1$.

2. Montrer que la série converge ssi la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ existe et qu'on a alors,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - b_1.$$

3. Montrer que $c_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. Soit $a_n = \frac{1}{c_n}$. Ecrire a_n sous la forme $b_{n+1} - b_n$.

5. Évaluer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6. Même question pour $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice III. On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. On note S_N la N^e somme partielle de cette série et on pose

$$T_N = S_N - \ln(N+1).$$

1. En admettant que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+x) - \ln x \leq \frac{1}{x},$$

déterminer la monotonie de la suite $(T_N)_{N \geq 1}$.

2. Que vaut T_1 ? En déduire $\forall N \geq 1, \quad S_N \geq \ln(N+1)$.

3. Calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente?

Exercice IV. On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. On note S_N la N^e somme partielle cette série.

1. Vérifier que $\forall n \geq 2,$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

2. En déduire que $\forall N \geq 2,$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leq S_N \leq 2 - \frac{1}{N}.$$

3. En déduire que la suite $(S_N)_{N \geq 1}$ est majorée.
4. Déterminer la monotonie de la suite $(S_N)_{N \geq 1}$.
5. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
6. Vérifier l'encadrement suivant

$$\frac{3}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2.$$

Exercice V. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants, (on pourra utiliser les règles de comparaison).

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, n \geq 0.$
2. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!}, n \geq 2.$
3. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!}, n \geq 3.$
4. $u_n = \frac{1}{10n+1}, n \geq 0.$
5. $u_n = \ln \frac{2+n^2}{1+n^2}, n \geq 1.$
6. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}, n \geq 1.$
7. $u_n = \frac{a}{n-1} - \frac{1}{n}, a \in \mathbb{R}, n \geq 2.$

Exercice VI. Étudier la nature et calculer la somme de la série numérique de terme général.

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}, \quad n \geq 0.$$

Exercice VII. Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}, n \geq 1.$
2. $u_n = \frac{n}{2^n}, n \geq 1.$
3. $u_n = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{3^n n!}, n \geq 1.$
4. $u_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}, n \geq 1.$
5. $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{(2n+1)}, n \geq 1.$

Exercice VIII. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R}, n \geq 1.$
2. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, n \geq 1.$
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}, n \geq 1.$
4. $u_n = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}.$
5. $u_n = \frac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n-3n}}, n \geq 1.$
6. $u_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}, n \geq 1.$

Exercice IX. 1. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{25n}$, pour $n \geq 1$ et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de 10^{-2} .

2. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+3}$, pour $n \geq 1$.

Exercice X. Étudier les séries de termes généraux suivants

1. $u_n = \frac{e^{in\theta}}{\ln(n)}$, $n \geq 2$. 2. $u_n = \frac{\cos(n)}{n + \cos(n)}$, $n \geq 1$. 3. $u_n = \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

Exercice XI. Étudier les séries de termes généraux suivants

1. $u_n = na^n$, $n \geq 1$. 2. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, $n \geq 1$. 3. $u_n = n \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right)$, $n \geq 1$.

Exercice XII. Montrer que les séries de termes généraux positifs a_n et $\frac{a_n}{1+a_n}$ sont de même nature.

Exercice XIII. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge vers S , alors $\sum_{n \geq 0} (a_n + a_{n+1})$ converge et calculer sa somme.

2. Supposons que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} (a_n + a_{n+1})$ converge vers T , alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et calculer sa somme.

3. Donner un exemple où au contraire, $\sum_{n \geq 0} (a_n + a_{n+1})$ converge et $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.