Exercice I. On considère les suites de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = x^n, \qquad g_n(x) = \frac{x^n}{n}, \qquad h_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{si } \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de ces suites de fonctions sur $[0,1]$.

2. Étudier la dérivée de g_n. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice II. La suite de fonctions (f_n) est définie sur $]-\infty,+\infty[$ par son terme général $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$.

1. Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que la convergence est uniforme sur tous les intervalles du type $[a,b]$ avec $|a| < 1$ et $|b| < 1$, ou bien $a > 1$, ou bien $b < -1$.

3. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur des intervalles contenant 1 ou -1.

Exercice III. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

Exercice IV. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx}$ définies sur l'intervalle $[0,100]$. Que dire de cette convergence sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

Exercice V. On donne la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{nx}$, $x \in]0,1[$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette suite sur l'intervalle de définition.

Exercice VI. Déterminer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{ne^x}{n+x} dx$.

Exercice VII. Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{n}{(x-n)^2+n^2}$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergent et que pourtant, on ne peut pas passer aux limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

Expliquer.

Exercice VIII. Soit la suite de fonctions (f_n) définies sur $[-1,+1]$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

1. Montrer qu'elle converge uniformément sur $[-1,+1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f'_n(x) = f'(x)$, dans tout intervalle de la forme suivante : $[-1,b]$, $b<0$ ou $[a,1]$, $a>0$.

3. Montrer que cette dernière propriété n'est pas vraie sur $[-1,+1]$. (Le théorème sur dérivation des suites de fonctions terme à terme ne s'applique pas ici sur $[-1,+1]$).

Exercice IX. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t)=\sqrt{t}$, $t\in[0,1]$. On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$p_0(t)=0,\quad p_{n+1}(t)=p_n(t)+\frac{1}{2}(t-p_n(t)^2),\quad t\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

1. a. Calculer p_1 et p_2.

b. Montrer que les applications p_n, $n\in\mathbb{N}$, sont polynômiales.

2. a. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\sqrt{t}-p_{n+1}(t)=(\sqrt{t}-p_n(t))\Big(1-\frac{1}{2}(\sqrt{t}+p_n(t))\Big).$$

b. En déduire que $0\le p_n(t)\le\sqrt{t}$ pour tout $t\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$.

3. a. Soit $t\in[0,1]$ fixé. Montrer que la suite $(p_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b. En déduire que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite que l'on déterminera.

4. a. En utilisant la relation du 2.(a), montrer que pour tout $t\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$0\le\sqrt{t}-p_n(t)\le\sqrt{t}\Big(1-\frac{1}{2}\sqrt{t}\Big)^n.$$

b. Soit $n\ge1$ fixé. En étudiant la fonction $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=x(1-\frac{x}{2})^n$, montrer que

$$|p_n(t)-f(t)|\le\frac{2}{n+1}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)^n,\qquad\text{pour tout } t\in[0,1].$$

5. Montrer que la suite de fonctions $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle qu'il existe $k > 0$ avec

$$|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq k, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

À tout $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$.

1. En écrivant $2^{n+1} = 2^n + 2^n$, montrer que

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{k}{2^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer alors que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq \frac{k}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. En déduire que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. Montrer que g vérifie

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

5. En déduire que $g(x) = xg(1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Indication : on pourra d'abord montrer que $g\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\, g(1)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$.

Exercice XI. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions croissantes réelles, continues et définies sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$, montrer que la convergence est uniforme.

Exercice XII. Soit α un nombre réel positif ou nul, et (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^\alpha}$.

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[0, 1]$.

2. Dans les deux cas $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, étudier la convergence de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Cette suite converge-t-elle vers $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx.$?

Exercice XIII. Soit $(f_n)_n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$

Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement, puis uniformément sur $\mathbb{R}^+$.