

Exercice I. Déterminer la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

$$1. \quad u_n(x) = x^n(1 - x^n), \quad n \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad 2. \quad v_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)}, \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice II. Etudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

$$1. \quad u_n(x) = \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n}, \quad n \geq 0, \quad 2. \quad v_n(x) = e^{-n^2 x}, \quad n \geq 0 \quad 3. \quad w_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad n \geq 1.$$

Exercice III. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}.$$

1. Soit $M > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $[0, M]$.
2. En déduire que la fonction somme $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (-1)^n f_n$ sur $[0, +\infty[$.

Exercice IV. 1. Montrer que la série de fonctions définie par son terme général $f_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, pour $n \geq 1$, converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on note f sa somme.

2. Exprimer $\int_0^1 f(x) dx$ comme somme d'une série numérique.

Exercice V. Soit $f_n(x) = e^{-nx} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$, pour $n \geq 1$, le terme général d'une série de fonctions définies sur $[0, +\infty[$. Montrer qu'elle converge simplement vers une fonction f dérivable et que $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$.

Exercice VI. Déterminer la convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions définies par les termes généraux

$$1. \quad u_n(x) = x^n(1 - x), \quad n \geq 0, \quad x \in [0, 1], \quad 2. \quad v_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x}, \quad n \geq 1, \quad x \in [0, +\infty[,$$

$$3. \quad w_n(x) = \frac{1}{x} \chi_{[n, n+1]}, \quad n \geq 1, \quad x \in [1, +\infty[.$$

Exercice VII. Soit la série de fonctions, de terme général $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^p}$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que si $p > 1$, elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $0 < p \leq 1$, $2k\pi < \alpha < \beta < 2(k+1)\pi$. Montrer que la convergence est uniforme sur $[\alpha, \beta]$.

Exercice VIII. Etudier les domaines de convergence simple et de convergence uniforme des séries de fonctions :

$$1. \quad t_n(x) = \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}, \quad 2. \quad s_n(x) = \frac{1}{2^{n-1} \sqrt{1 + nx}}, \quad 3. \quad z_n(x) = \frac{\cos(nx)}{e^{nx}}.$$

Exercice IX. On considère la série de fonctions définies sur $[0, 1]$ par le terme général $f_n(x) = \frac{x^n}{n^3(1+x^n)}$, pour $n \geq 1$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0, 1]$.

2. La fonction $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, est-elle dérivable sur $[0, 1]$?

Exercice X. Soit $|a| < 1$. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = \cos(x)^n a^n$, pour $n \geq 0$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. En déduire que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - a \cos(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$.

Exercice XI. Soit $f_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}$, pour $n \geq 1$, le terme général d'une série de fonctions définies sur $[0, 1]$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0, 1]$.

2. Montrer que la fonction $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est dérivable, calculer sa dérivée sous forme d'une série.

3. Calculer la valeur de la dérivée $f'(x)$ au point $x = 1$.

Exercice XII. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la série des fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2. On note S sa somme. Montrer que $\int_0^1 S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos(n))}{n^4}$.

3. Montrer que $\int_0^{\pi} S(x) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

Exercice XIII. Soit $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + n^3 x^2}$, pour $n \geq 1$, le terme général d'une série de fonctions. Montrer qu'elle converge sur tout $\mathbb{R}$ vers une fonction f dérivable.