Université Aix-Marseille III – licence de mathématiques et informatique – 2e année
Complément en intégration (MA303) – mardi 5 janvier 2010 – T. Coulbois

**Examen**

*Ni calculatrices, ni documents. 1 heure 30.*

**Exercice I. (Cours, 6 points) 1.** Donner la définition de l'intégrale au sens de Riemann

**2.** Montrer que les primitives d'une fonction définies sur un intervalle diffèrent d'une constante.

**Exercice II.** Calculer en précisant le domaine de validité les primitives suivantes

**1.** $\displaystyle\int \theta \sin\theta \, d\theta$, **2.** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$, **3.** $\displaystyle\int \ln(1+t^2)\, dt$.

**Exercice III.** Soit $a$ un paramètre réel. On veut calculer l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2ax+1}$.

**1.** Déterminer en fonction de la valeur de $a$ les racines de $x^2-2ax+1=0$.

Le discriminant réduit de ce polynôme est $\Delta = a^2-1$.

1. Pour $a \in ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $\Delta>0$, il y a deux racines : $x_- = a-\sqrt{a^2-1}$ et $x_+ = a+\sqrt{a^2-1}$.
2. Pour $a\in]-1;1[$, $\Delta<0$, le polynôme n'a pas de racines.
3. Pour $a=\pm1$, $\Delta=0$, le polynôme a une racine double $a$.

**2.** Pour $a\in]-1;1[$ calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-2ax+1}$.

Pour $a\in]-1;1[$ , le dénominateur n'a pas de racines donc il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue qui es définie. Calculons :
$x^2-2ax+1 = (x-a)^2+1-a^2$, posons $\delta=\sqrt{1-a^2}$ et $u=\frac{x-a}{\delta}$. Alors $du=\frac{dx}{\delta}$.

$$I_a = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2ax+1} = \frac{1}{\delta}\int_{x=0}^{x=1} 1\frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\delta}\int_{u=\frac{-a}{\delta}}^{u=\frac{1-a}{\delta}} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\delta}\left[\arctan u\right]_{u=\frac{-a}{\delta}}^{u=\frac{1-a}{\delta}}$$
$$= \frac{1}{\delta}\left(\arctan\frac{1-a}{\delta} - \arctan\frac{-a}{\delta}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left(\arctan\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} - \arctan\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)$$

**3.** Préciser la nature de $I_1$ et $I_{-1}$, effectuer le calcul lorsque cela est possible.

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ a un pôle d'ordre 2 en $x=1$ et est donc divergente (intégrale du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$).
$I_{-1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}$, c'est l'intégrale d'une fonction définie et continue, elle est donc définie.
$$I_{-1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

**4. a.** Montrer que pour $a \in ]1;+\infty[$, l'une des deux racines de $x^2 - 2ax + 1 = 0$ est dans l'intervalle $]0;1[$.

En reprenant les notations ci-dessus, $x_- = a - \sqrt{a^2-1} = \frac{1}{a+\sqrt{a^2-1}}$. Or $a \in ]1;+\infty[$, donc $1 < a + \sqrt{a^2-1}$ et $x_- \in ]0;1[$.

**b.** En déduire que pour $a \in ]1;+\infty[$ l'intégrale $I_a$ diverge.

La fraction rationnelle $\frac{1}{x^2-2ax+1}$ a donc un pôle simple dans $[0;1]$, donc son intégrale diverge (intégrale de type $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

**5. a.** Montrer que pour $a \in ]-\infty;-1[$, $x^2 - 2ax + 1 = 0$ n'a pas de racines dans $[0;1]$.

Toujours en reprenant les notations ci-dessus, $x_- = a - \sqrt{a^2-1} \leq a < -1$ et $x_+ = a + \sqrt{a^2-1} = \dfrac{1}{a - \sqrt{a^2-1}} = \dfrac{1}{x_-} < 0$.
Ce qui montre que les deux racines de $x^2 - 2ax + 1 = 0$ sont dans $]-\infty;0[$ et donc que $x^2 - 2ax + 1 = 0$ n'a pas de racines dans $[0;1]$.

**b.** Pour $a \in ]-\infty;-1[$ calculer $I_a$.

D'après la question précédente, $I_a$ est l'intégrale d'une fonction définie et continue, elle est donc définie. Calculons

$$\begin{aligned}
\forall x \neq x_\pm, \quad \frac{1}{x^2-2ax+1} &= \frac{1}{x_- - x_+}\left(\frac{1}{x-x_-} - \frac{1}{x-x_+}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\left(\frac{1}{x-x_+} - \frac{1}{x-x_-}\right)
\end{aligned}$$

Intégrons :

$$\begin{aligned}
I_a = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-2ax+1} &= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-x_+} - \frac{1}{x-x_-}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \left[\ln(x-x_+) - \ln(x-x_-)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln\left(\frac{(1-x_+)(-x_-)}{(1-x_-)(-x_+)}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln\left(\frac{1-x_-}{1-x_+}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln\left(\frac{1-a+\sqrt{a^2-1}}{1-a-\sqrt{a^2-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right).
\end{aligned}$$