Exercice I. Calculer **1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x-2}$ **2.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-x}\,dx$ **3.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x^2+2x+4}\,dx$

4. Soit $m \in]-\infty;1[$, calculer $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-m}$.

Exercice II. Calculer en précisant le domaine de validité

1. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1+\tan\theta}$ **2.** $\displaystyle\int \sin x e^x\,dx$ **3.** $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

Exercice III. On considère la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Donner le tableau de variations de f, ses limites et tracer sa courbe représentative.

4. Montrer par récurrence sur n que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour $x > 0$ la dérivée n-ième de f est de la forme $f^{[n]}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}}e^{-\frac{1}{x}}$ où P_n est un polynôme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Exercice IV. On considère la fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

1. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[\frac{1}{3\pi};+\infty]$.

2. Donner tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est maximum.

3. Donner tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = 0$.

4. Montrer que f n'est pas continue en 0.

5. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xf(x)$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que g n'est pas dérivable en 0.

c. Donner tous les x de $\mathbb{R}$ où la courbe représentative de g est tangente à la droite d'équation $y = x$.

d. Donner tous les x de $\mathbb{R}$ où la courbe représentative de g est tangente à la droite d'équation $y = -x$.

6. On considère enfin la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xg(x) = x^2f(x)$.

a. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer la fonction dérivée g' n'est pas continue en 0.

7. Tracer les courbes représentatives de f, g et h.

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2010/integration/`