Exercice I. Soit $f : \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \frac{1}{x} \end{array}$

1. Pour $\epsilon > 0$ et $x_0 > 0$ trouver $\eta = \eta(\epsilon, x_0) > 0$ tel que $\forall x \in]0;+\infty[$, si $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

2. Montrer que f n'est pas uniformément continue sur $]0;+\infty[$.

Exercice II. **1.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I dont la dérivée est bornée. Montrer que f est uniformément continue sur I.

2. Donner un exemple de fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée n'est pas bornée, mais qui est uniformément continue.

Exercice III. **Sommes de Riemann :** calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{1}{2k+1}$ **2.** $v_n \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n})^{\frac{1}{n}}$ **3.** $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{n}$

4. $t_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n} \sin \frac{k}{n^2}$ (on pourra montrer que $w_n - t_n$ tend vers 0).

Exercice IV. **1.** Montrer que l'intégral $I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est convergente.

2. Montrer que $I = \pi$

3. En utilisant les sommes de Riemann, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{2}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \pi.$$

Exercice V. On considère la formule de calcul approché de l'intégrale suivante :

$$\int_0^2 f(t)\, dt = af(x_1) + bf(x_2)$$

1. Quelles relations doivent satisfaire, a, b, x_1 et x_2 pour que la formule soit exacte pour

1. les fonctions constantes,
2. les fonctions affines,
3. les fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à 2.

2. Donner des valeurs possible de a, b, x_1 et x_2

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2010/integration/`