

Ni calculatrices, ni documents. 1 heure.

Exercice I. (Cours, 5 points)

1. Donner la définition du produit de deux matrices.

Exercice II. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

où a est un réel.

1. Calculer les produits AB et BA .
2. Inverser (si cela est possible) la matrice A .
3. Vérifier le résultat obtenu.
4. Pour quelle valeur de a peut-on calculer l'inverse de la matrice B ? (*Vous devez justifier votre réponse, mais le calcul de B^{-1} n'est pas forcément nécessaire*)

Exercice III. Résoudre le système, en discutant suivant les valeurs du réel a ,

$$\begin{cases} x + ay + z = 3 \\ x + 2ay + z = 4 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercice IV. Normaliser les matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$