Durée de l'épreuve : 3 heures
Documents et calculatrices interdits

Exercice I. Questions de cours : [4 points]

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition des coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$
2. Soit A une matrice carrée 3×3 et X un vecteur

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- a. Écrire le système $AX = 0$.
- b. Soit r le rang de A . Donner les différentes valeurs possible pour r ainsi que la dimension de l'espace des solutions du système $AX = 0$ en fonction de r .

Exercice II. [3 points]

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x - y + z = -4 \\ x + y - z = -2 \\ -x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

2. Soit m un paramètre réel. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = m \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 6x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

en distinguant les différents cas selon la valeur de $m \in \mathbb{R}$. Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles le système admet une infinité de solutions ?

Exercice III. [3 points]

1. Calculer l'inverse de la matrice A , ou alors montrer qu'elle n'est pas inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Donner le déterminant de A .
3. Calculer l'inverse de la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Vérifiez votre calcul.

Exercice IV. [3 points]

1. Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice V. [3 points]

1. Déterminer le rang de la matrice D .

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit m un paramètre réel. Déterminer en fonction de m le rang de la matrice E .

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice VI. [4 points]

Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
2. En déduire une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.
3. Trouver une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}$.
4. Donner une équation cartésienne dans la base $\mathcal{B}'$ de la droite vectorielle engendrée par $v = u_1 + mu_2$ pour un réel m .