Exercice I. Pour $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ calculer $A + B$, $A \cdot B$ et $B \cdot A$.

Exercice II. Pour A et B données à l'exercice I et $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ calculer $(A \cdot B)C$ et $A(B \cdot C)$.

Exercice III. Trouver $A = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$ tel que $[1, 2]A = [0, 3, 1]$.
(Attention : il y a beaucoup de possibilités pour A).

Exercice IV. Une matrice **diagonale** a tous ses coefficients hors de la diagonale nuls.
$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ ou $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Calculer AB et BA.

2. Est-ce que toutes les matrices diagonales commutent ($\iff AB = BA$) ?

3. Trouver une matrice non-diagonale C tel que $AC \neq CA$.

Exercice V. Une matrice **triangulaire** $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est définie par les équations

$$\forall i, j, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad a_{ij} = 0$$

Exemples $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer $A \cdot B$.

2. Est-ce que que pour toutes matrices $A, B \in M_n(K)$ triangulaires, $A \cdot B$ est également triangulaire ?

Exercice VI. Vérifier que le produit d'une matrice A avec une **colonne** $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ est une combinaison linéaire des colonnes de A de coefficients c_i.

Exercice VII. Vérifier ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$ et ${}^t(BC) = {}^tC \cdot {}^tB$ pour les matrices A, B et C des exercices I et II.

Exercice VIII. Normaliser les matrices

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad (b) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice IX. Résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 3x_3 & = & 0 \\ x_2 + 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 6x_3 + x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Exercice X. Inverser les matrices (ou montrer qu'il n'existe pas d'inverse).

$$\mathbf{1.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{2.} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercice XI. Résolution de systèmes d'équations linaires. Discuter en fonction des valeurs des paramètres m, a et b.

1.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + my + z & = & 1 \\ mx + y + (m-1)z & = & m \\ x + y + z & = & m+1 \end{array} \right.$$

2.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y + z + 2t & = & 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t & = & 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t & = & 7 \\ 8x + 12y + 7z + t & = & 9 \end{array} \right.$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + z & = & 1 \\ x + aby + z & = & b \\ x + by + az & = & 1 \end{array} \right.$$

Consultez régulièrement la page `http://www.latp.univ-mrs.fr/~coulbois/2010/ma304`